INTEGRALFORMELN ZUR KENNZEICHNUNG VON HYPERFLÄCHEN DURCH KRÜMMUNGEN UND STÜTZABSTAND

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Udo Simon

aus Liegnitz

1965

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

INTEGRALFORMELN ZUR KENNZEICHNUNG VON HYPERFLÄCHEN DURCH KRÜMMUNGEN UND STÜTZABSTAND

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Udo Simon

aus Liegnitz

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

1. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer

2. Referent: Professor Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 7. 1965
Tag der Promotion: 27. 8. 1965

Meiner Mutter

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546513_0028

INHALTSVERZEICHNIS

			Seite
		Einleitung und Zusammenfassung	7
I.			10
	§ 1	Grundformeln der relativen Geometrie	10
	§ 2	Darstellungen der Krümmungsgrößen	13
	§ 3	Ungleichungen für elementarsymmetrische Funktionen	16
	§ 4	Integralformeln für die Krümmungsgrößen	18
	§ 5	Anwendungen der Integralformeln	26
	§ 6	Kennzeichnungen von Sphären im E^{n+1}	34
II.			36
	§ 7	Grundformeln der radialen Theorie	37
	§ 8	Darstellungen der radialen Krümmungsgrößen	40
	§ 9	Beziehungen äquiaffiner und radialaffiner Größen	41
	§ 10	Radialaffine Integralformeln	43
	§ 11	Radialaffine Kennzeichnungen der Affinsphären	45
III.			47
	§ 12	Kennzeichnungen berandeter Flächen	47
		Literaturverzeichnis	51

EINLEITUNG UND ZUSAMMENFASSUNG

Zu den klassischen Ergebnissen der " Differentialgeometrie im Großen" gehören die bekannten H- und K-Sätze von Liebmann und Hilbert; sie kennzeichnen die Kugel unter den Eiflächen durch konstante mittlere Krümmung bzw. unter den geschlossenen Flächen durch konstante Gaußsche Krümmung. Beide Sätze wurden nach vielen Richtungen hin verallgemeinert; so wurde der H-Satz von H. Hopf |20| für Flächen mit dem Geschlecht null und von A. D. Aleksandrov (|4| und |8|) für selbstdurchdringungsfreie, geschlossene Flächen bewiesen; Blaschke (|11| , S. 201 und S. 214) übertrug den H-Satz in die äquiaffine Geometrie, während Süss |32| die H- und K-Sätze auf Eihyperflächen in der Relativgeometrie verallgemeinerte.
1952 veröffentlichte K. P. Grotemeyer (|16| und |17|) einige Integralformeln, mit deren Hilfe er Sphären bzw. Affinsphären durch $H = - P^{-1}$ (unter Eiflächen) bzw. durch $K = P^{-2}$ (unter geschlossenen Flächen) charakterisierte.(1) Anschließend bewies er in |18| den H-P-Satz: "Auf einer Eifläche im E^3 sei $H = f(P)$, $f \in C^1$, $f'(P) \geq 0$. Dann ist die Eifläche eine Kugel." Mit bisher unveröffentlichten Integralformeln stellte er den entsprechenden K-P-Satz auf. (2) 1958 bewies A.D. Aleksandrov (insbesondere | 6|) analoge H_r-P-Sätze für Hyperflächen.(3)

---

(1) Die Kennzeichnung von Sphären unter den Eiflächen durch $K = P^{-2}$ stammt von Blaschke. P ist der Stützabstand; bezüglich des Vorzeichens vgl. Fußnote 16.
(2) vgl. Fussnote 15.
(3) Die Größen H_r ($r = 1,..,n$) sind die normierten elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen.

Dabei verwandte Aleksandrov Unitätssätze für die Lösungen partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typ; diese Methode ist wohl erstmalig bei Lewy |26| und Aleksandrov (|2| und |3|) zu finden; in den Arbeiten |4| - |8| wurde das Verfahren von Aleksandrov weitgehend ausgebaut, so daß es jetzt eine der besten Methoden ist, um Eindeutigkeitsaussagen für Hyperflächen zu gewinnen.-

Ziel dieser Arbeit ist es nun, ein weiteres Verfahren zu entwickeln, das Kennzeichnungen von Hyperflächen durch Krümmungen und Stützabstand gestattet: wir werden eine einfache Methode zur Aufstellung von Integralsätzen angeben und allgemeine "Minkowskische Integralformeln" ((4.1), (4.5), (4.6), (12.1)) beweisen, die wir dann später zur Charakterisierung von Hyperflächen anwenden. Ausgangspunkt unserer Überlegungen waren die zitierten Arbeiten von Grotemeyer.
Unser Verfahren bauen wir im Rahmen der Relativgeometrie von Müller und Süss[4] auf; wählt man als Eichfläche der Relativgeometrie die Einheitssphäre bzw. das Affinkrümmungsbild, so erhält man die euklidischen bzw. äquiaffinen Spezialfälle. Die Methode zur Aufstellung von Integralsätzen ist aber ebenso in der radialaffinen Theorie und in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung brauchbar. Während die grundlegenden Integralformeln (4.1) in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung formal gleich aussehen, haben sie in der radialaffinen Theorie etwas abweichende Gestalt, so daß wir sie im zweiten Teil gesondert herleiten.
In den §§ 1 - 3 stellen wir die entsprechenden Hilfsmittel zusammen, insbesondere entwickeln wir in § 2 geeignete Darstellungen der Krümmungsgrößen. Im Anschluß daran leiten wir in § 4 verallgemeinerte Minkowskiformeln her, - insbesondere (4.1) und (4.5), - auf denen unser Verfahren aufbaut. Während für alle bisher bekannten Minkowskischen Integralformeln der Integrand der Formeln (M_r) in § 4 charakteristisch ist, haben die Inte-

(4) s. z. B. Schirokov, Kapitel 8.

gralformeln (4.5) und (4.6) erweiterte "Minkowskiintegranden". In den §§ 5 und 6 geben wir Anwendungen der Integralsätze aus § 4; neben bereits bekannten charakteristischen Eigenschaften von Sphären erhalten wir eine Reihe weiterer Kennzeichnungen; als Spezialfälle ergeben sich Charakterisierungen der n-dimensionalen Kugel bzw. des n-dimensionalen Ellipsoids in der euklidischen bzw. äquiaffinen Geometrie.
Um auch in der radialaffinen Theorie entsprechende Kennzeichnungen von Affinsphären (bzw. Ellipsoiden) zu erhalten, geben wir im zweiten Teil der Arbeit zwei Wege an; dazu entwickeln wir, - nach Vorbereitungen in § 7, - in § 8 eine selbständige radialaffine Krümmungstheorie mit geeigneten Beziehungen für die Krümmungsgrößen, so daß wir entsprechende verallgemeinerte Minkowskiformeln der radialaffinen Theorie in § 10 aufstellen können; mit dem Integralsatz (10.1) können wir die in § 4 entwickelte Methode zur Aufstellung von Integralformeln in die radialaffine Theorie übertragen.
Eine andere Möglichkeit, analoge Ergebnisse der Vektorraumgeometrie zu erhalten, besteht darin, Beziehungen zwischen den radialaffinen und den äquiaffinen Flächengrößen auszunutzen. Soweit sie nicht schon bekannt sind, entwickeln wir diese Beziehungen systematisch in § 9.
§ 11 bringt die wichtigsten Kennzeichnungen der Affinsphären innerhalb der radialaffinen Theorie.
Im abschließenden Teil der Arbeit wenden wir uns offenen Flächen zu. Die grundsätzlichen Überlegungen führen wir im Anschluß an die Minkowskiformeln (4.1) durch; für die radialaffine Theorie gilt dann das Entsprechende.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor Dr. K. P. Grotemeyer für seine Anregungen und für die Unterstützung der Arbeit sehr danken. Mein Dank gilt auch seinem Assistenten, Herrn Dr. H. F. Münzner, für wertvolle Hinweise.

K A P I T E L I

§ 1 Grundformeln der relativen Geometrie[5]

R^{n+1} sei der (n+1)-dimensionale affine Raum. Das äußere Produkt

(1.1) $$a = [a_1,\dots,a_n]$$

der n Vektoren a_i (i=1,..,n) werde durch die für alle Vektoren x gültige Gleichung

(1.2) $$\langle x,a\rangle = |x,a_1,\dots,a_n|$$

definiert; dabei sei $\langle x,a\rangle$ das skalare Vektorprodukt und $|x,a_1,..,a_n|$ die Determinante mit den angegebenen Vektoren als Spalten. $x(u^i)$, $y(u^i)$ mögen zwei auf gleiche lokale Parameter u^i (i=1,..,n) bezogene orientierte Hyperflächenstücke der Differenzierbarkeitsklasse C^5 beschreiben;das durch $x(u^i)$ dargestellte Hyperflächenstück F sei nicht Torse, d.h. für die Determinante $l=||l_{ik}||$ mit den Komponenten

(1.3) $$l_{ik} = |x_{i|k},x_1,\dots,x_n|$$ [6]

gelte $l \neq 0$. Außerdem enthalte die Tangentialebene von $x(u^i)$ nicht den Koordinatenursprung; es sei also $|x,x_1,\dots,x_n| \neq 0$.

$x(u^i)$ werde durch $y(u^i)$ relativ normalisiert, d.h. die Tangentialebenen an $x(u^i)$ und $y(u^i)$ seien in entsprechenden Punkten parallel. $y(u^i)$ wird dann auch als Eichfläche von $x(u^i)$ bezeichnet. In allen Punkten von $x(u^i)$ gelte

(1.4) $$W = |y,x_1,\dots,x_n| \neq 0.$$

Der Kovektor ξ, der die Tangentialebenen festlegt, wird durch

(1.5) $$\langle \xi,x_i\rangle = 0$$ und

(1.6) $$\langle \xi,y\rangle = 1$$

---

(5) vgl. etwa |31|, Kapitel 8

(6) Dabei bezeichnen x_i bzw. $x_{i|k}$ die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen nach den Parametern u^i:

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \quad \text{und} \quad x_{i|k} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k}$$

eindeutig bestimmt. Wegen der relativen Normalisierung gilt

(1.7) $$\langle \xi, y_1 \rangle = 0$$

und damit wegen (1.6)

(1.8) $$\langle \xi_1, y \rangle = 0.$$

Für ξ gilt die Darstellung

(1.9) $$\xi = W^{-1} \cdot [x_1, .., x_n].$$

Durch

(1.10) $$G_{ik} = \langle x_{i|k}, \xi \rangle$$

wird auf F eine Riemannsche Metrik eingeführt. Mit $1 = ||1_{ik}|| \neq 0$ ist auch $G = ||G_{ik}|| \neq 0$. Aus (1.5) folgt

(1.11) $$G_{ik} = -\langle x_i, \xi_k \rangle.$$

Auf den Maßtensor G_{ik} beziehen wir wie üblich die Prozesse der kovarianten Differentiation und die des Hebens und Senkens von Indices. Durch

(1.12) $$\varepsilon_{i_1..i_n} = \sqrt{|G|} \cdot \mathrm{sign}(i_1..i_n)$$

wird der Diskriminantentensor von Ricci definiert, analog

(1.13) $$\varepsilon^{i_1..i_n} = \sqrt{|G|^{-1}} \cdot \mathrm{sign}(i_1..i_n);$$

dabei sei $\mathrm{sign}(i_1..i_n)$ erklärt durch

$$\mathrm{sign}(i_1..i_n) = \begin{cases} 1 \text{ für eine gerade Permutation } (i_1..i_n) \text{ der Zahlen } (1..n) \\ -1 \text{ für eine ungerade Permutation} \\ 0, \text{ falls } i_k = i_m \text{ für } k \neq m. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht

(1.14) $$\varepsilon_{i_1..i_n} \varepsilon^{i_1..i_k}{}_{\cdot \cdot} {}^{j_{k+1}..j_n} =$$

$$= k! \cdot \sum_\sigma G_{j_{k+1}\sigma(i_{k+1})} \cdot \ldots \cdot G_{j_n\sigma(i_n)} \cdot \mathrm{sign}(\sigma).$$

Summiert wird über alle Permutationen σ, die $(i_1..i_k)$ festlassen. Entsprechend gilt:

(1.15) $$\varepsilon_{i_1..i_n} \varepsilon^{i_1..i_k j_{k+1}..j_n}{}_{\cdot \cdot} =$$

$$= k! \cdot \sum_\sigma \delta^{j_{k+1}}_{\sigma(i_{k+1})} \cdot\cdot\, \delta^{j_n}_{\sigma(i_n)} \cdot \mathrm{sign}(\sigma).$$

δ^k_i ist das Kroneckersymbol. Weiterhin gilt

(1.16) $$Q\cdot\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\cdot\xi = [x_{i_1},\ldots,x_{i_n}]$$

mit

(1.17) $$Q = W\cdot|G|^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

(1.16) und (1.6) ergeben

(1.18) $$Q\cdot\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = |y,x_{i_1},\ldots,x_{i_n}|.$$

Durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten erhält man die Beziehung

(1.19) $$Q\cdot\varepsilon_{i_1\ldots i_{r-1}}{}^{k}{}_{i_{r+1}\ldots i_n}\cdot\xi_k(-1)^{r-1} = [y,x_{i_1},\ldots,x_{i_{r-1}},x_{i_{r+1}},\ldots,x_{i_n}].$$

Die Tensoren

(1.20) $$B_{ik} = \langle y_{i||k},\xi\rangle = -\langle y_i,\xi_k\rangle = \langle y,\xi_{i||k}\rangle \quad (7a)$$

und

(1.21) $$A_{ikl} = \langle x_{i||k||l},\xi\rangle = -\langle x_{i||k},\xi_l\rangle = \langle x_i,\xi_{k||l}\rangle \quad (7b)$$

sind symmetrisch.

A_{ikl} ist der Tensor der kubischen Grundform. Der Kovektor

(1.22) $$V_l = \frac{1}{n}G^{ik}A_{ikl}$$

wird als Tschebyscheff-Vektor bezeichnet. Die Ableitungsgleichungen der relativen Geometrie lauten

(1.23) $$x_{i||k} = A_{ik}{}^{l}x_l + G_{ik}y$$

(1.24) $$\xi_{i||k} = -A_{ik}{}^{l}\xi_l + B_{ik}\xi$$

(1.25) $$y_i = B_i{}^{k}x_k .$$

Aus (1.23) folgt

(1.26) $$\frac{1}{n}G^{ik}x_{i||k} = V^l x_l + y .$$

(7a) wegen (1.7) und (1.8)

(7b) wegen (1.11) und $G_{ik||l} = 0$

Als Relativabstand p des Ursprungs von der Hyperfläche $x(u^i)$ bezüglich der Eichfläche $y(u^i)$ bezeichnet man den Quotienten der euklidischen Stützabstände von $x(u^i)$ bzw. $y(u^i)$ vom Ursprung; damit ergibt sich für p

$$p = \frac{|x,x_1,\ldots,x_n|}{|y,x_1,\ldots,x_n|} = \langle x,\xi\rangle . \tag{1.27}$$

Wegen (1.5) ist

$$p_i = \langle x,\xi_i\rangle , \tag{1.28}$$

woraus mit (1.13) und (1.25) folgt

$$p_{i\|k} = - G_{ik} - A_{ik.}^{\ r}p_r + B_{ik}\cdot p . \tag{1.29}$$

Ist $du^i \wedge du^k$ das alternierende Produkt der Differentiale du^i und du^k, so ist

$$du^{i_1}\wedge\ldots\wedge du^{i_n} = \varepsilon^{i_1\ldots i_n}\, d\alpha; \tag{1.30}$$

$d\alpha$ ist das Flächenelement,

$$do = Q\cdot d\alpha \tag{1.31}$$

das "relative Flächenelement". Für ein orientierbares Hyperflächenstück G mit dem Rand ∂G und eine in $\partial G \cup G$ stetige und in G stetig differenzierbare Differentialform Ω vom Grad n-1 gilt schließlich noch der allgemeine Stokessche Satz

$$\int_G d\wedge\Omega = \int_{\partial G} \Omega . \tag{1.32}$$

Dabei trägt der Rand ∂G die von G auf natürliche Weise induzierte Orientierung.

§ 2 Darstellungen der Krümmungsgrößen

Die Eigenwerte K_r $(r = 1,\ldots,n)$ von

$$\|B_{i.}^{\ j} + K\cdot G_{i.}^{\ j}\| = 0 \tag{2.1}$$

werden als r-te relative Hauptkrümmungen der Hyperfläche F bezeichnet; die normierte elementarsymmetrische

Funktion H_r $(r = 1,\ldots,n)$

$$(2.2) \qquad H_r = \binom{n}{r}^{-1} \cdot \sum_{1\leq i_1<i_2\cdots<i_r\leq n} \prod_{j=1}^{r} K_{i_j}$$

heißt r-te Relativkrümmung; außerdem werde $H_o=1$ gesetzt.

LEMMA 2.1: Für die r-te Relativkrümmung gilt die Darstellung

$$(2.3) \qquad H_r = \frac{(-1)^r}{n!}\, \varepsilon^{i_1\cdots i_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_n} \cdot B_{i_1}^{\ j_1} \cdots B_{i_r}^{\ j_r}$$

Beweis: S_r sei die r-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen K_j; M_r sei Hauptminor r-ter Ordnung von $\|B_{i.}^{\ k}\|$, C_r sei die Summe aller Hauptminoren r-ter Ordnung. Dann gilt: $(-1)^r S_r = C_r$ (8). Wegen (1.15) und $H_r = \binom{n}{r}^{-1} S_r$ folgt $\varepsilon^{i_1\cdots i_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_n} \cdot B_{i_1}^{\ j_1} \cdots B_{i_r}^{\ j_r} =$ $n! \cdot \binom{n}{r}^{-1} \cdot C_r = n!(-1)^r H_r$. Damit gilt (2.3). -

Insbesondere ist also $H_1 = -\frac{1}{n} B_{k.}^{\ k}$ (9) und $H_n = (-1)^n \frac{\|B_{ik}\|}{\|G_{ik}\|} = (-1)^n \|B_{i.}^{\ k}\|$. Aus (2.3) ergibt sich mit (1.16), (1.18) und (1.25)

$$(2.4) \qquad \varepsilon^{i_1\cdots i_n} [y_{i_1}\cdots y_{i_r} x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n}] = n!(-1)^r \cdot Q \cdot H_r \cdot \xi \ .$$

Wegen der Schiefsymmetrie des Diskriminantentensors ist für $i_k \neq i_r$

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n} \cdot y_{i_k} \,|\, i_r = 0 \text{ und } \varepsilon^{i_1\cdots i_n} \cdot x_{i_k} \,|\, i_r = 0, \text{ also}$$

---

(8) vgl. Mirsky, | 27 | Theorem 7.1.3 ; dabei beachte man das Vorzeichen der durch (2.1) definierten Eigenwerte.

(9) Das Vorzeichen der Eigenwerte in (2.1) wurde wegen des konventionellen Vorzeichens von H_1 in der äquiaffinen Theorie festgesetzt; vgl. Blaschke | 11 | , S. 170, (212).

(2.5) $$\varepsilon^{i_1..i_n}\,[y,y_{i_2},..,y_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}]_{||i_1}=(-1)^r H_r\, n!\,Q\cdot\xi\,.$$

Die für r = 1,..,n durch

(2.6) $$n!\cdot C^{ij}_{(r)} = \varepsilon^{ii_2..i_n}{}_{\cdot j}\cdot\varepsilon^{j}{}_{\cdot j_2\cdot j_r i_{r+1}\cdot i_n}\cdot B^{j_2}_{i_2}\cdot\ldots B^{j_r}_{i_r}\cdot$$

definierten Tensoren[10] eignen sich gut zur Aufstellung von Integralformeln. Es gelten nämlich wegen (2.3) die Beziehungen

(2.7) $$C^{ij}_{(r)}G_{ij} = (-1)^{r-1}H_{r-1}$$

(2.8) $$C^{ij}_{(r)}B_{ij} = (-1)^r H_r\ .$$

Insbesondere ist

(2.9) $$C^{ij}_{(1)} = \frac{1}{n}\,G^{ij}$$

und für n=2

(2.10) $$C^{ij}_{(2)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ik}\,\varepsilon^{j}{}_{\cdot r}\,B^{r}_{k\cdot} = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{B}^{ij}\ .$$

$\underset{\sim}{B}^{ij}$ heißt der zu B_{ij} adjungierte Tensor.- Durch eine affine Parametertransformation lassen sich G_{ij} und B_{ij} in einem Punkt P auf die Form

(2.11a) $$G_{ij}=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq j\\ 1 \text{ für } i=j\end{cases}\qquad B_{ij}=\begin{cases}0 \text{ für } i\neq j\\ -K_i \text{ für } i=j\end{cases}$$

transformieren. In diesem Koordinatensystem wird

(2.11b) $$C^{ij}_{(r)} = \begin{cases}0 & \text{für } i\neq j\\ \dfrac{(-1)^{r-1}}{r}\,\dfrac{\partial H_r}{\partial K_i} & \text{für } i=j.\end{cases}$$

Ist auf einem Flächenstück $K_i>0$ für alle i, so ist wegen (2.11) B_{ij} negativ definit und

(2.12) $$D^{ij}_{(r)} = (-1)^{r-1}\,C^{ij}_{(r)}$$

positiv definit. Schließlich ergibt ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

(2.13) $$[y,y_{i_2},..,y_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}]\,\varepsilon^{ji_2..i_n} = C^{jk}_{(r)}\cdot\xi_k\cdot n!\cdot Q,$$

---

(10) s. Voss, |35|, S. 186 f.

also

$$(2.14)\qquad \varepsilon^{ji_2..i_n}{}_{|x,y,y_{i_2},..,y_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}|} = QC^{jk}_{(r)}\cdot p_k\cdot n! \ .$$

§ 3 Ungleichungen für elementarsymmetrische Funktionen

Ist K_r die r-te Hauptkrümmung, so soll ein Punkt mit $K_1 = K_2 = .. = K_n$ Relativnabel heißen. Eine geschlossene Fläche werde als Relativsphäre bezeichnet, wenn jeder Punkt Relativnabel ist. Im Fall n = 2 besteht eine bekannte Kennzeichnung von Sphären unter den geschlossenen Flächen durch $H^2-K = 0$ ($H \neq 0$) (s. Grotemeyer, |17|)[11]; die Definitheit des Ausdrucks H^2-K wird bei der Anwendung von Integralformeln ausgenutzt, um $H^2-K = 0$ nachzuweisen. Um analoge Ausdrücke für Hyperflächen zu erhalten, notieren wir die folgenden Ungleichungen für elementarsymmetrische Funktionen.

Für sämtliche Ungleichungen dieses Paragraphen werde vorausgesetzt: k_r (r=1,..,n) seien n reelle Zahlen, S_j seien ihre elementarsymmetrischen Funktionen und es sei

$$H_j = \binom{n}{j}^{-1}\cdot S_j \ , \ H_o = 1 \ .$$

LEMMA 3.1: Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$(3.1)\qquad U_{(j,j,1)} := H_j^{\,2} - H_{j-1}\cdot H_{j+1} \geqq 0$$

für j = 1,..,n-1. Dabei steht das Gleichheitszeichen in (3.1) genau dann, wenn $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ gilt.[12]

LEMMA 3.2: Die Voraussetzungen von Lemma 3.1 seien erfüllt, zusätzlich sei $k_r > 0$ für alle r. Dann gilt für $0 < l \leqq j \leqq k < k+l \leqq n$

$$(3.2)\qquad U_{(j,k,l)} := U_{(j,k,l,0)} := H_j\cdot H_k - H_{j-l}\cdot H_{k+l} \geqq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$U_{(j,k,l,s)} := H_{j+s}\cdot H_{k-s} - H_{j-l}\cdot H_{k+l} \geqq 0$$

mit $0 \leqq 2s \leqq k-j$; die Gleichheit in (3.2) gilt genau dann, wenn $k_1 = k_2 = .. = k_n$ ist.

---

(11) bekanntlich ist stets $H^2-K \geqq 0$.

(12) s. |9| , S.11 .

Für l=1, s=0 findet man (3.2) bei Bullen-Marcus(|12|, S. 287, (10)). (3.2) folgt aus dieser Ungleichung durch Induktion. Aus (3.2) ergeben sich die Spezialfälle (3.3) und (3.4). Für l=j=1, s=0 folgt[13]

$$U_k := U_{(1,k,1)} = H_1 H_k - H_{k+1} \geq 0. \tag{3.3}$$

Die Aussage über das Gleichheitszeichen gilt wie in (3.2). Schließlich ist

$$H_{k-s} H_{k+s} - H_{k-r} H_{k+r} \geq 0 \tag{3.4}$$

mit $0 \leq s < r < k < k+r \leq n$. Gleichheit in (3.4) gilt wieder genau dann, wenn $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ ist.

LEMMA 3.5: Sei $k_r > 0$ für alle r=1,..,n und sei $m = \sum_{i=1}^{s} m_i \leq n$ mit $0 \leq m_i \leq n$. Dann gilt

$$P_{(m,s)} := \prod_{i=1}^{s} H_{m_i} - H_m \geq 0. \tag{3.5}$$

Die Aussage über das Gleichheitszeichen gilt wie bisher. (s. |19|, S. 64).

LEMMA 3.6: Sei $k_r > 0$ für alle r=1,...,n. Dann gilt für $2 \leq m \leq n$ bzw. $1 \leq s < m \leq n$

$$M_{(m,m-1)} := (H_{m-1})^{\frac{1}{m-1}} - (H_m)^{\frac{1}{m}} \geq 0, \text{ also} \tag{3.6}$$

$$M_{(m,s)} := (H_s)^{\frac{1}{s}} - (H_m)^{\frac{1}{m}} \geq 0,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$. (s. |19|, S. 52)

---

(13) (3.3) folgt bereits mit der schwächeren Voraussetzung $H_s > 0$ für alle $s \leq k-1$ aus (3.1); bei Kennzeichnungen von Sphären wird man diese Möglichkeit ausnutzen, um Konvexitätsvoraussetzungen abzuschwächen (vgl. Feeman und Hsiung, |15|). Ähnliche Überlegungen kann man z.T. auch für andere Ungleichungen dieses Paragraphen anstellen (s. auch § 6).

§ 4 Integralformeln für die Krümmungsgrößen

Die klassischen Minkowskischen Integralformeln für geschlossene konvexe Flächen im E^3 (14)

$$\int (H \cdot P + 1)\, do = 0$$

$$\int (K \cdot P + H)\, do = 0$$

sind in vieler Hinsicht verallgemeinert worden: wohl zuerst von T. Kubota (|23| , |24|) für Eihyperflächen im E^n, danach von W. Süss (|32| , |33|) relativgeometrisch. Für Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung wurden Minkowskiformeln von Feeman und Hsiung (|15| , |21| , |22|) aufgestellt. Schließlich bewies W. Scherrer (|30|) auch für nichtgeschlossene Flächen im E^3 Minkowskiformeln und verwandte Integralformeln für Krümmungsgrößen und Stützabstand.
Wir wollen jetzt Integralformeln beweisen, die die Minkowskischen Integralformeln der relativen Geometrie verallgemeinern. Dazu bedienen wir uns einer Beweismethode von K. P. Grotemeyer, die er in |16| und |17| benutzte, um äquiaffine Integralformeln aufzustellen, die denen von Scherrer entsprechen; Schließlich charakterisierte er mit (4.1) im Fall n = 2 Sphären im E^3. (15)
Mit den Darstellungen für die Krümmungsgrößen in § 2 können wir nun diese Methode leicht mehrdimensional relativgeometrisch ausbauen.

---

(14) H und K sind die mittlere bzw. Gaußsche Krümmung, P ist der euklidische Stützabstand mit dem Vorzeichen wie in (1.27); do ist das Flächenelement.
(15) Diese bisher unveröffentlichten Integralformeln und ihre Anwendungen kenne ich aus der Vorlesung "Differentialgeometrie II", die Herr Professor Grotemeyer im WS 1960/61 an der Freien Universität Berlin gehalten hat.

Unter den allgemeinen Voraussetzungen von § 1 gilt:

SATZ 4.1: Die orientierte, geschlossene Hyperfläche F im R^{n+1} werde durch parallele Tangentialebenen auf die Eichhyperfläche G bezogen, die den Koordinatenursprung im Innern enthält. Ist dann p der durch (1.27) erklärte Relativabstand von F bezüglich G und ist H_r die durch (2.2) definierte r-te Relativkrümmung, so gilt (r=1,..,n):

$$(4.1)\qquad \int_F (H_{r-1} + H_r \cdot p) \cdot f \; do \;=\; \int_F D^{ij}_{(r)} \cdot p_i \cdot f_j \; do \quad .$$

$f = f(u^i), f \in C^1$, ist eine beliebige Ortsfunktion auf F; $D^{ij}_{(r)}$ ist durch (2.6) und (2.12) gegeben.

Für f = const. erhält man die Minkowskiformeln der relativen Geometrie:

$$(M_r)\qquad \int_F (H_{r-1} + H_r \cdot p) \; do \;= 0 \quad , \quad (r = 1,..,n).$$

Beweis von (4.1): Multipliziert man (2.5)

$$\varepsilon^{i_1..i_n}\left[y, y_{i_2}, .., y_{i_r}, x_{i_{r+1}}, .., x_{i_n}\right] \|_{i_1} = n! \cdot Q \cdot (-1)^r H_r \cdot \xi$$

mit $f(u^i) \cdot x(u^i)$, so ist wegen $p = \langle x, \xi \rangle$

$$(4.a)\{\varepsilon^{i_1..i_n} \langle \left[y, y_{i_2}, .., y_{i_r}, x_{i_{r+1}}, .., x_{i_n}\right], x \rangle f\}_{\|i_1}$$

$$- \varepsilon^{i_1..i_n} \langle \left[y, y_{i_2}, .., y_{i_r}, x_{i_{r+1}}, .., x_{i_n}\right], x_{i_1} \rangle f$$

$$- \varepsilon^{i_1..i_n} \langle \left[y, y_{i_2}, .., y_{i_r}, x_{i_{r+1}}, .., x_{i_n}\right], x \rangle f \|_{i_1} = n! Q f p (-1)^r H_r .$$

Mit (2.4) wird aus dem zweiten Term links

$$- \varepsilon^{i_1..i_n} \langle \left[y, y_{i_2}, .., x_{i_n}\right], x_{i_1} \rangle f = f \cdot \varepsilon^{i_1..i_n} \langle \left[x_{i_1}, y_{i_2} .. x_{i_n}\right], y \rangle$$

$= Q \cdot f \cdot (-1)^{r-1} \cdot H_{r-1} \cdot n!$; der dritte Ausdruck links ist aus (2.14) abzulesen; damit lautet (4.a):

$$(4.b)\quad \{\varepsilon^{i_1..i_n}\langle[y,y_{i_2},..,y_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}],x\rangle f\}_{\|i_1} + n!\cdot Q(-1)^{r-1}H_{r-1}\cdot f - C^{ij}_{(r)}p_i f_j Q\cdot n! = Q\cdot(-1)^r H_r p\cdot f\cdot n! \quad .$$

Aus (4.b) erhalten wir für orientierte geschlossene Flächen die gesuchten Integralformeln, denn der erste Term links läßt sich bei Integration mit Hilfe von (1.32) in ein Randintegral verwandeln, das für geschlossene Flächen verschwindet. Mit (1.31) folgt (4.1).

In § 12 werden wir auch offene Flächen betrachten, so daß wir das Randintegral berücksichtigen werden; (12.1'') ist die entsprechende Erweiterung von (4.1). (12.1'') enthält für spezielle Wahl von f und für n=2 die Formeln (III), (IV), (V) von Grotemeyer aus |16| und (6) aus |17|; (12.1'') umfaßt außerdem alle von Scherrer in |30| angegebenen Integralformeln.

In |18| stellte K. P. Grotemeyer durch geeignetes Überschieben der Gaußschen Ableitungsgleichungen Integralformeln für Flächen im E^3 auf, mit deren Hilfe er zuerst den H-p-Satz bewies; Spezialfälle der Formel (4.1) für n=2 ermöglichten ihm später ein einheitliches Beweisprinzip für den H-p-Satz und den K-p-Satz.(17) Während sich das letzte Verfahren nicht auf Dimensionen n>2 übertragen läßt, kann man mit den Darstellungen aus § 2 die Integralformeln aus |18| relativgeometrisch mehrdimensional verallgemeinern und erhält so für r=1,..,n-1 die H_r-p-Sätze; dabei tritt (3.3) an die Stelle von $H^2 - K \geq 0$.

Wir wollen jetzt im Anschluß an die erweiterten Minkowskiformeln (4.1) eine neue, einfache Methode angeben, die es erlaubt, zu jeder Ungleichung über elementarsymmetrische Funktionen aus § 3 einen entsprechenden Integralsatz aufzustellen; u. a. erhalten wir die eben erwähnten Verallgemeinerungen der Grotemeyer-Integralformeln aus |18|.

---

(16) Zu beachten ist nur, daß sowohl Grotemeyer als Scherrer in ihren Arbeiten den Stützabstand aus (1.27) mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert haben.

(17) vgl. die Fußnote 15.

Bezeichnet man die Integranden $(H_{r-1} + H_r p)$ der Minkowskiformeln als "Minkowskiglieder", die nicht-negativen Terme des Typs $U_{(j,k,l,s)}$, $M_{(m,r)}$, $P_{(m,s)}$ als U-Glieder, so läßt sich unser Verfahren kurz so skizzieren: zu einem gegebenen U-Glied U_1 stellt man eine Identität auf, in der nur U_1, weitere U-Glieder und Minkowskiglieder auftreten. Multipliziert man mit einer Ortsfunktion $f = f(u^i), f \in C^1$, so ergibt anschließende Integration und Anwendung der Formeln (4.1) die gesuchte Integralformel, in der man jetzt über f so verfügen kann, daß die Integrale des Typs

$$\int D^{ij}_{(r)} p_i f_j \, do$$

in gewünschter Weise definiten Integranden haben.(18)

Betrachten wir die Ungleichung (3.2). Es sei $0<r<r+t\leq n$. Dann ist

$$U_{(r,r+t-1,1)} = (H_r H_{r+t-1} - H_{r+t} H_{r-1}) = H_r(H_{r+t-1} + H_{r+t}\cdot p) - H_{r+t}(H_{r-1} + H_r \cdot p).$$

Multiplikation mit $f = f(u^i) \in C^1$, Integration und zweimalige Anwendung von (4.1) ergibt

$$(4.2a) \quad \int (H_r H_{r+t-1} - H_{r+t} H_{r-1}) f \, do = \int (H_r f)_j \, D^{ij}_{(r+t)} p_i \, do - \int (H_{r+t} f)_j \, D^{ij}_{(r)} p_i \, do$$

mit $(0<r<r+t\leq n)$. Aus (3.2) wollen wir noch eine weitere Integralformel ableiten, die (4.3a) "ergänzt". Integrieren wir für $0\leq r<r+t<n$ die Identität

$$pfU_{(r+1,r+t,1)} = pf(H_{r+1} H_{r+t} - H_{r+t+1} H_r) = H_{r+t}(H_{r+1}\cdot p + H_r) f - H_r(H_{r+t+1}\cdot p + H_{r+t}) f$$

---

(18) Da nicht jede der so gewonnenen Integralformeln eine neue Kennzeichnung der Sphäre bringt, beschränken wir uns auf die wesentlichen Integralsätze.

und formen die rechts entstehenden Integrale wieder mit (4.1) um, so erhalten wir

$$(4.2b)\qquad \int (H_{r+1}H_{r+t} - H_{r+t+1}H_r)p\cdot f \, do =$$

$$\int (H_{r+t}f)_j D^{ij}_{(r+1)} p_i \, do - \int (H_r f)_j D^{ij}_{(r+t+1)} p_i \, do$$

Im Gegensatz zu (4.2a) können wir jetzt auf der rechten Seite über $0 \leq r < r+t < n$ verfügen, insbesondere also über den Fall r=0. Dafür ist jetzt aber r+t=n ausgeschlossen. Einer der "Grenzfälle" wird also stets nicht erfaßt; das liegt offensichtlich an der Struktur der Ungleichungen in § 3. Die Ansätze zu (4.2a) und (4.2b) machen es deutlich, wie man verfahren muß, um Integralformeln gleichen Typs zu erhalten, die sich ergänzen. Als Spezialfälle notieren wir die später benötigten Formeln

$$(4.3a)\qquad \int (H_1 H_{t-1} - H_t)f \, do = \int (H_1 f)_j D^{ij}_{(t)} p_i \, do$$

$$- \frac{1}{n} \int (H_t f)_j G^{ij} p_i \, do$$

für t=2,..,n; für t=1,..,n-1 ist

$$(4.3b)\qquad \int (H_1 H_t - H_{t+1})f\cdot p \, do = \frac{1}{n} \int G^{ij} p_i (H_t f)_j \, do$$

$$- \int D^{ij}_{(t+1)} p_i f_j \, do \, .$$

(4.3b) wurde im euklidischen Fall n=2, t=1, f=const. von Grotemeyer [18] mit einer anderen Methode aufgestellt: er überschob die Gaußschen Ableitungsgleichungen mit geeigneten Tensoren, um den Ausdruck $(H^2 - K)$ zu erhalten. Diese Methode läßt sich auch zur Herleitung von (4.3a) mehrdimensional verallgemeinern. Dazu geht man von (1.25) aus und überschiebt mit dem Tensor

$$L^{ij}_{(r)} = -\left(\frac{1}{n} G^{ij} H_r + (-1)^{r+1} C^{ij}_{(r+1)}\right) .$$

Die in |18| explizit benutzte Form der Gleichungen von Mainardi-Codazzi umgeht man in der Relativgeometrie durch Bildung geeigneter Randintegrale (Satz von Stokes), die dann für geschlossene Flächen verschwinden.

Wenden wir uns (3.6) zu. Es ist für r = 2,...,n:

$$(H_{r-1} - (H_r)^{\frac{r-1}{r}})H_r^{\frac{1-r}{r}} = p(H_1 - H_r^{\frac{1}{r}}) + (pH_r + H_{r-1})H_r^{\frac{1-r}{r}} - (1 + H_1 p) ;$$

wie eben folgt

$$(4.4)\quad \int (H_{r-1} - H_r^{\frac{r-1}{r}})\cdot H_r^{\frac{1-r}{r}} \cdot f \, do = \int p(H_1 - H_r^{\frac{1}{r}})\cdot f \, do + \int D^{ij}_{(r)} \cdot p_i \left[(H_r)^{\frac{1-r}{r}} \cdot f\right]_{\|j} do - \frac{1}{n}\int G^{ij} p_i f_{\|j} \, do .$$

Dabei haben wir wieder (2.9) und (2.12) benutzt.

Aus (4.1) wollen wir schließlich noch eine weitere Integralformel herleiten, bei der das "Minkowskiglied" von der Form $(H_{m+k}(-p)^k - H_m)$ ist; für k = 1 erhalten wir wieder das "Minkowskiglied" aus (4.1). Setzt man in (4.1) $f(u^i) = -(-p)^{r-s-1}\cdot g$ mit $g = g(u^i) \in C^1$, so folgt aus

$$\int (H_r(-p)^r - H_{r-1}(-p)^{r-1})(-p)^{-s}\cdot g \, do =$$

$$\int g\cdot D^{ij}_{(r)} \cdot (r-s-1)(-p)^{r-s-2} p_i p_j \, do - \int D^{ij}_{(r)} \cdot (-p)^{r-s-1} p_i g_j do$$

durch Summation über r für $0 \leq m < m+k \leq n$:

$$(4.5)\quad \int (H_{m+k}(-p)^k - H_m)(-p)^m(-p)^{-s}\cdot g \, do =$$

$$= \int g \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)} p_i p_j (r-s-1)(-p)^{r-s-2} \, do - \int \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)} p_i g_j (-p)^{r-s-1} \, do .$$

Es ist jetzt sofort klar, daß man mit den Integralformeln (4.5) die Methode, mit der wir im Anschluß an (4.1) die Integralsätze (4.2) - (4.4) gewonnen haben, erweitern kann: an die Stelle der "Minkowskiglieder" aus (4.1) treten diejenigen aus (4.5). Wir wollen das in einigen wichtigen Fällen durchführen.
Gehen wir von der Identität

$$(H_{m-s}H_{m+s}(-p)^k - H_{m-k}H_m) = H_{m-k}(H_{m+k}(-p)^k - H_m) + (-p)^k(H_{m-s}H_{m+s} - H_{m-k}H_{m+k})$$

aus, so erhalten wir nach Multiplikation mit $(-p)^{m-t}\cdot h(u^i)$ und anschließender Integration mit Hilfe von (4.5) die Integralformeln

$$(4.6)\quad \int (H_{m-s}H_{m+s}(-p)^k - H_{m-k}H_m)(-p)^{m-t}\cdot h\, do =$$

$$= \int (-p)^{k+m-t}(H_{m-s}H_{m+s} - H_{m-k}H_{m+k})\cdot h\, do +$$

$$+ \int (H_{m-k}\cdot h) \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)} p_i p_j (r-t-1)(-p)^{r-t-2}\, do -$$

$$- \int \sum_{r=m+1}^{m+k} (-p)^{r-t-1} D^{ij}_{(r)} p_i (H_{m-k}\cdot h)_j\, do .$$

Dabei ist $0 \leq m-s \leq m+s \leq n$, $0 \leq m-k \leq m+k \leq n$ und t ganz.
Weitere Integralformeln erhält man aus Identitäten der Art

$$(4.c)\quad (H_{m-s}H_{m+s}(-p)^k - H_{m-k}H_m) = H_{m-s}(H_{m+s}(-p)^s - H_m)(-p)^{k-s} + H_m(H_{m-s}(-p)^{k-s} - H_{m-k}) \quad \text{und}$$

$$(4.d)\quad (H_{m-s}H_{m+s} - H_{m-k}H_{m+k})(-p)^k + H_{m-k}(H_{m+k}(-p)^k - H_m) =$$

$$= (H_{m+s}(-p)^s - H_m)H_{m-s}(-p)^{k-s} + H_m(H_{m-s}(-p)^{k-s} - H_{m-k}),$$

in denen nach geeigneter Multiplikation und anschließender Integration mehrere Glieder mit (4.5) umzuformen sind. Die Integralformel (4.5) erlaubt es uns endlich, auch Lemma (3.5) zur Aufstellung von Integralformeln anzuwenden. Für $0 \leq m<m+k \leq n$, $\sum_{i=1..r} m_i = m+k$ erhalten wir aus der Identität

$$(-p)^k\Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_{m+k}\Big) = \Big((-p)^k \cdot \prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\Big) - \big(H_{m+k}(-p)^k - H_m\big)$$

durch Anwendung von (4.5) die Integralformel

$$\text{(4.7a)} \quad \int h(-p)^{k+m-s}\cdot\Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\Big)\,do =$$

$$= \int h\Big((-p)^k \prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\Big)(-p)^{m-s}\,do$$

$$- \int h \cdot \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)}\, p_i p_j (r-s-1)(-p)^{r-s-2}\,do$$

$$+ \int \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)}\, p_i h_j (-p)^{r-s-1}\,do;$$

ebenso folgt für $0 \leq m<m+k \leq n$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$ aus

$$\Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\Big) = \big(H_{m+k}(-p)^k - H_m\big) + \Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_{m+k}(-p)^k\Big) :$$

$$\int h(-p)^{m-s}\cdot\Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\Big)do = \int h\Big(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - (-p)^k H_{m+k}\Big)(-p)^{m-s}do +$$

$$+ \int h \cdot \sum_{r=m+1}^{m+k} D^{ij}_{(r)} p_i p_j (r-s-1)(-p)^{r-s-2}\,do \qquad \text{(4.7b)}$$

$$- \int \sum_{r=m+1}^{m+k} (-p)^{r-s-1}\, D^{ij}_{(r)}\, p_i h_j\,do \quad , \text{ s ganz.}$$

§ 5 Anwendungen der Integralformeln

Als Anwendung der in § 4 bewiesenen Integralformeln wollen wir im Rahmen der Relativgeometrie eine Reihe von Sätzen beweisen, in denen Relativsphären durch relative Krümmungsgrößen und relativen Stützabstand gekennzeichnet werden.(19) Als Spezialfälle erhält man die entsprechenden Sätze der euklidischen Geometrie, wenn man als Eichfläche die Einheitssphäre wählt; nimmt man dagegen das Affinkrümmungsbild als Eichfläche, so erhält man Kennzeichnungen von eigentlichen Affinsphären im Rahmen der Blaschkeschen äquiaffinen Geometrie. Die Charakterisierungen der Affinsphären kann man auch als Charakterisierungen von Ellipsoiden aussprechen; es gilt nämlich der folgende Satz:(20)
Jede affinsphärische Eifläche im R^{n+1} ist ein Ellipsoid.

Für die Anwendungen der Formeln aus § 4 betrachten wir die im folgenden definierte Flächenklasse $\mathfrak{H}$; für $E \in \mathfrak{H}$ gelte:

(5.A) $E \in C^5$ sei geschlossen und orientierbar;
(5.B) G_{ik} sei positiv definit auf E;
(5.C) der Koordinatenursprung liege im Innern von E und es sei $p < 0$;
(5.D) $D^{ij}_{(r)}$ sei positiv definit für alle r=1,..,n;
(5.E) H_r sei für alle r=1,..,n positiv.

(5.D) und (5.E) sind etwa dann erfüllt, wenn alle Hauptkrümmungen auf E stets positiv sind. Das überlegt man sich leicht mit (2.3), (2.11) und (2.12). In diesem Fall ist auch B_{ik} negativ definit. Das Vorzeichen von p hängt von der Richtung von ξ und wegen (1.6) damit von der Wahl der Normalisierung durch $y(u^i)$ ab.

---

(19) Den Zusatz "relativ" werden wir in den Sätzen dieses Paragraphen weglassen, so daß wir nur kurz von Sphären, Krümmungsgrößen,.... sprechen werden.

(20) Blaschke |11| , S. 212 für n = 2;
Deicke |13| , S. 46 für n > 2.

SATZ 5.1: H_r-p-Satz:(21)

Für $E \in \mathcal{K}$ gebe es ein r, $1 \leq r \leq n$, so daß auf E gilt:

$$H_r = G(p),\ G \in C^1, \text{ und } \frac{dG}{dp} = G'(p) \geq 0.$$

Dann ist E Sphäre.

Beweis: I. Für den Fall, daß $1 \leq r \leq n-1$ ist, wählen wir in (4.3b) $f \equiv$ const. . Mit $(H_r)_{ij} = G'(p)\cdot p_j$ lautet (4.3b)

$$\int U_r \cdot p \cdot do = \frac{1}{n} \int G^{ij} p_i p_j \cdot G'(p) do .$$

Nach (3.3) ist $U_r \geq 0$, nach (5.C) $p<0$. Also gilt für den linken Integranden I_L: $I_L \leq 0$. Dagegen ist der rechte Integrand I_R wegen (5.B) und der Voraussetzung $G' \geq 0$ stets nicht negativ. Damit folgt p=const.,d.h. E ist Sphäre.

II. Sei $2 \leq r \leq n$. Jetzt benutzen wir (4.4) mit f = const. Wegen $H_r = G(p)$ folgt

$$((H_r)^{\frac{1-r}{r}})_{ij} = \frac{1-r}{r}(H_r)^{\frac{1-2r}{r}} \cdot (H_r)_{ij} = \frac{1-r}{r}(H_r)^{\frac{1-2r}{r}} \cdot G'(p)p_j ;$$ damit

lautet (4.4):

$$\int (H_{r-1} - (H_r)^{\frac{r-1}{r}})(H_r)^{\frac{1-r}{r}} do =$$

$$\int p(H_1 - H_r^{\frac{1}{r}}) do + \int \frac{1-r}{r} \cdot D^{ij}_{(r)} p_i p_j (H_r)^{\frac{1-2r}{r}} \cdot G'(p) do .$$

Wegen Lemma 3.6 ist $H_{r-1} - (H_r)^{\frac{r-1}{r}} \geq 0$ und $H_1 - H_r^{\frac{1}{r}} \geq 0$; mit (5.E) ist also der linke Integrand nicht negativ, während die rechten Integranden mit (5.C) und (3.6) bzw. (5.D), (5.E) und wegen der Voraussetzung $G'(p) \geq 0$ nicht positiv sind. Also können wir wieder auf $p_j = 0$ schliessen, d.h. E ist Sphäre.

Wir wollen die folgenden Spezialfälle der H_r-p-Sätze hervorheben:

SATZ 5.2: Auf $E \in \mathcal{K}$ gelte für ein r, $1 \leq r \leq n$,

$$(-p)^r \cdot H_r = c = \text{const.}$$

Dann ist c = 1 und E ist Sphäre.

---

(21) s. |18| ;vgl. Fußnote 15 für n = 2; für $n \geq 2$ s. Aleksandrov, insbesondere |6| .

Beweis: Mit $H_r = c(-p)^{-r} = G(p)$ wird $G' = r \cdot c(-p)^{-(r+1)}$, also $G' \geq 0$, so daß die Voraussetzungen des H_r-p-Satzes erfüllt sind. Die Aussage über die Konstante folgt etwa aus (4.5) für $m = 0$. (22)

SATZ 5.3: H_r-Satz: (23)
Auf $E \in \mathfrak{h}$ gelte für ein r, $1 \leq r \leq n$, H_r=const. Dann ist E Sphäre.

SATZ 5.4: Es gebe auf $E \in \mathfrak{h}$ n-1 Funktionen $f_r = f_r(p)$, $f_r \in C^1$, (r=1,..,n-1), so daß gilt

a) sign f_1 = sign f_2 = .. = sign f_{n-1} = e, wobei entweder e = +1 oder e = -1 sei; (24)

b) es gibt ein k, $1 \leq k \leq n-1$, so daß die Nullstellen von f_k nirgends dicht auf E liegen;

c) $\sum_{r=1}^{n-1} H_r f_r = G(p)$, $G \in C^1$, $e \cdot G'(p) \geq 0$;

d) $e \cdot f_r'(p) \leq 0$ für alle r;

dann ist E Sphäre.

Beweis: Aus (4.3b) folgt durch Summation

$$\int \sum_{r=1}^{n-1} U_r f_r p \; do = \frac{1}{n} \int G^{ij} p_i \sum_{r=1}^{n-1} (H_r f_r)_j \; do - \int \sum_{r=1}^{n-1} D^{ij}_{(r+1)} p_i (f_r)_j \; do.$$

Mit (3.3), (5.B), (5.D) und den Voraussetzungen schließt man auf das Verschwinden der Integranden. Also ist $\sum U_r f_r p = 0$ und damit auch $U_r f_r = 0$ für alle r. In Punkten mit $f_k \neq 0$ folgt $U_k = 0$; da die Punkte mit $f_k = 0$ nirgends auf E dicht liegen, verschwindet U_k auf ganz E.

Einen ähnlichen Satz beweist man unter Verwendung der Integralformeln (4.3b) und (4.4):

SATZ 5.4a: Auf $E \in \mathfrak{h}$ seien n Funktionen $g_r = g_r(p)$, $g_r \in C^1$, r=1,..,n, definiert, so daß gilt:

a) sign g_r = e für alle r=1,..,n; (25)

---

(22) s. Blaschke, |11|, S. 233, und Grotemeyer |17| ; außerdem s. Aeppli |1| und Aleksandrov (|6|, S. 399) für $n \geq 2$.

(23) s. Süss, |33|.

(24) Dabei bedeute sign f_r=1: f_r ist auf E nicht negativ
sign f_r= -1: f_r ist auf E nicht positiv
Diese Bezeichnung verwenden wir auch in den folgenden Sätzen.

b) $e \cdot g_r'(p) \leqq 0$ für alle r;
c) es gibt ein k, $1 \leqq k \leqq n$, so daß die Nullstellen von g_k nirgends dicht auf E liegen;

d) $H_1 g_1 + \sum_{r=2}^{n} (H_r)^{\frac{r-1}{r}} g_r = G(p)$, $G \in C^1$, $e \cdot G'(p) \geqq 0$;

dann ist E Sphäre. $\frac{1-r}{r}$
Zum Beweis setzt man $g_r = f_r \cdot H_r$ in (4.4); Summation über r (r=2,..,n) und Subtraktion von (4.3b) für r=1 ergibt die benötigte Integralformel.
Die Sätze 5.4, 5.4a umfassen für spezielle Wahl der Funktionen f_r bzw. g_r die Sätze 5.1, 5.2, 5.3.

SATZ 5.5: Gibt es auf $E \in \mathfrak{h}$ eine Funktion $f = f(u^i)$, $f \in C^1$, deren Nullstellen auf E nirgends dicht liegen, sign f = e, und zwei Krümmungen H_r, H_{r+t}, $1 \leqq r < r+t \leqq n$, so daß gilt:

$$(f \cdot H_{r+t}) = G_1(p),\ G_1 \in C^1,\ e \cdot G_1'(p) \geqq 0;$$
$$(f \cdot H_r) = G_2(p),\ G_2 \in C^1,\ e \cdot G_2'(p) \leqq 0,$$

so ist E Sphäre.
Beweis: Aus (4.2a) folgt

$$\int (H_r H_{r+t-1} - H_{r+t} H_{r-1}) f \, do = \int G_2' \, D^{ij}_{(r+t)} p_i p_j \, do + \int (-G_1') D^{ij}_{(r)} p_i p_j \, do .$$

Mit (3.2), (5.D) und den Voraussetzungen schließen wir wie in Satz 5.4.
Interessant sind die folgenden Spezialfälle von Satz 5.5:

SATZ 5.6: Es gebe auf $E \in \mathfrak{h}$ zwei Krümmungen H_r, H_{r+t}, $1 \leqq r < r+t \leqq n$, so daß entweder

a) $\frac{H_{r+t}}{H_r} = G_1(p),\ G_1 \in C^1,\ G_1'(p) \geqq 0$ oder

b) $\frac{H_r}{H_{r+t}} = G_2(p),\ G_2 \in C^1,\ G_2'(p) \leqq 0$ gilt;

dann ist E Sphäre.(26)

(25) wegen e siehe Satz 5.4 und Fußnote (24)

Beweis: Um etwa a) nachzuweisen, wählt man in Satz 5.5 $f = \frac{1}{H_r}$; damit wird $G_1(p) = \frac{H_{r+t}}{H_r}$, $G_2(p) = 1$ und $e=1$; die Voraussetzungen von Satz 5.5 sind erfüllt, so daß die Behauptung folgt.
Man kann insbesondere in Satz 5.6 für $G_1(p)$ bzw. $G_2(p)$ eine Konstante wählen; so erhalten wir

SATZ 5.7: Sind auf $E \in \mathfrak{h}$ irgendzwei Krümmungen H_r, H_{r+t} $(1 \leqq r<r+t \leqq n)$ stets proportional: $H_r = c \cdot H_{r+t}$, $c=\text{const.} \neq 0$, so ist E Sphäre.
Der Beweis von Satz 5.5 und damit der der nachfolgenden Sätze 5.6 und 5.7 beruhte auf der Integralformel (4.2a). Wählt man (4.2b) als Ausgangspunkt der Beweise, so ist $0 \leqq r<r+t<n$ zu nehmen; wir erfassen also insbesondere den Fall $r=0$. Für $r=0$ ist aber Satz 5.6 gerade wieder der H_t-p-Satz (Satz5.1) für $t=1,..,n-1$, - Satz 5.7 der H_t-Satz $(t=1,..,n-1)$. Während man daher für $0 \leqq r<r+t<n$ die Sätze 5.1 und 5.6 mit einer Integralformel beweisen kann, - nämlich mit (4.2b),- muß man für $r+t = n$ in beiden Fällen verschiedene Integralformeln benutzen: (4.2a) bzw. (4.4).

SATZ 5.8: Auf $E \in \mathfrak{h}$ gebe es $(n-r)$ Ortsfunktionen $f_t = f_t(u^i)$, $f_t \in C^1$, $t=1,..,n-r$, von denen mindestens eine nirgends dichte Nullstellen hat, und $(n-r+1)$ Krümmungen H_r, H_{r+t}, so daß gilt:
a) $\text{sign } f_1 = \text{sign } f_2 = \ldots = \text{sign } f_{n-r} = e$; (27)

b) $\sum_{t=1}^{n-r} f_t H_{r+t} = G(p)$, $G \in C^1$, $e \cdot G'(p) \geqq 0$;

c) $f_t H_r = g_t(p)$, $g_t \in C^1$, $e \cdot g'(p) \leqq 0$ $(t=1,..,n-r)$;

dann ist E Sphäre.

---

(26) Ein Beispiel für G_1 bzw. G_2 gibt Satz 5.10 im Falle der Gleichheit.
(27) vgl. Fußnote (24) zu Satz 5.4

Beweis: Aus (4.2a) folgt durch Summation über t (t=1,..,n-r) die zum Beweis nötige Integralformel.- Während in den Sätzen 5.4, 5.4a die auftretenden Funktionen vom Stützabstand p abhängen, sind die Funktionen f_t in Satz 5.8 beliebige, stetig differenzierbare Ortsfunktionen.- Wählt man in Satz 5.8 insbesondere g_t konstant für t=1,..n-r, - wobei $g_t=0$ zugelassen ist,- so folgt

SATZ 5.9: Auf $E \in \mathfrak{H}$ gebe es (n-r+1) Krümmungen H_r, H_{r+t} (t=1,..,n-r<n) mit

$$\frac{1}{H_r} \cdot \sum_{t=1}^{n-r} g_t H_{r+t} = G(p),\ G \in C^1,\ G'(p)\cdot e \geqq 0;$$

Dabei seien die g_t Konstanten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden; für alle t=1,..,n-r sei sign $g_t = e^{(28)}$. Dann ist E Sphäre.

In Satz 5.6a läßt sich also der Zähler H_{r+t} durch eine Linearkombination ersetzen.- Natürlich kann man bei den Sätzen 5.8 und 5.9 statt von (4.2a) wieder von (4.2b) ausgehen, so daß der Fall r=0 zugelassen ist. Dann kommen wir wieder auf einen Satz der Art 5.4 . Wir wollen noch ausdrücklich bemerken, daß man bei der Anwendung von (4.2a) auf die Voraussetzung $p<0$ für $E \in \mathfrak{H}$ in den Sätzen 5.5 - 5.9 verzichten kann.

In |34| zeigte Süss, daß Hypersphären durch

$$H_{m+k}(-p)^k - H_m = 0$$

gekennzeichnet werden. Dieses Ergebnis ist in Satz 5.6a für $G_1(p) = (-p)^{-k}$ enthalten. Wir wollen das Resultat von Süss jetzt noch in anderer Hinsicht verallgemeinern:

SATZ 5.10: Es sei $0 \leqq m < m+k \leqq n$. Auf $E \in \mathfrak{H}$ gelte entweder

a) $$H_{m+k}(-p)^k - H_m \leqq 0$$

oder

b) $$H_{m+k}(-p)^k - H_m \geqq 0;$$

---

(28) vgl. Fußnote 24 zu Satz 5.4

Dann ist E Sphäre und in a) und b) gilt das Gleichheitszeichen.

Beweis: Wir benutzen die Integralformel (4.5):

a) Wir wählen g=const.>0 und s=0. Damit ist der linke Integrand nicht positiv; in

$$\sum_{r=m+1}^{m+k} \int g \cdot D^{ij}_{(r)} p_i p_j (r-1)(-p)^{r-2} \, do$$

sind alle Integranden nicht negativ; wie üblich folgt die Behauptung.

b) Jetzt sei g=const.>0 und s=n-1; dann schließen wir wie eben.

Eine Folgerung von Satz 5.10 ist

SATZ 5.11: Es sei $1 \leqq k \leqq n$; gilt dann auf $E \in \mathfrak{h}$ für eine Krümmungsfunktion H_k entweder

$$\text{a)} \qquad H_k(-p)^k \leqq 1 \qquad \text{oder}$$

$$\text{b)} \qquad H_k(-p)^k \geqq 1, \tag{29}$$

so ist E Sphäre und in a) und b) gilt die Gleichheit.

Insbesondere gibt es auf jeder Fläche $E \in \mathfrak{h}$ also stets Punkte mit $H_k(-p)^k = 1$.

Der Beweis von a) und b) ist aus Satz 5.10 für m=0 klar. Die zusätzliche Behauptung beweist man dann indirekt. Wir haben gleichzeitig noch einmal Satz 5.2 mitbewiesen.

SATZ 5.12: Es sei $0 \leqq s < k < m < m+k \leqq n$. Auf $E \in \mathfrak{h}$ gelte für vier Krümmungen

$$\text{a)} \quad H_{m-s}H_{m+s}(-p)^k - H_{m-k}H_m \leqq 0 \qquad \text{oder}$$

$$\text{b)} \quad H_{m-k}H_{m+k}(-p)^s - H_{m-s}H_m \geqq 0 .$$

Dann ist E Sphäre.

Beweis: a) in (4.6) sei $h = \frac{1}{H_{m-k}} > 0$, so daß das letzte Integral wegen $(H_{m-k}h)_j = 0$ verschwindet. Mit der Voraussetzung und (3.4) ist $(H_{m-s}H_{m+s} - H_{m-k}H_{m-k}) \geqq 0$.

Wählt man schließlich $t \leqq m$, etwa t=0, so ist stets $(r-t-1) \geqq 0$. Wie üblich ergibt sich die Behauptung.

---

(29) Im Fall der Gleichheit s. wieder Süss |34|.

b) Vertauscht man in der Integralformel (4.6) die Buchstaben k und s, so ist wegen (3.3) $H_{m-k}H_{m+k}-H_{m-s}H_{m+s} \leqq 0$; analog zu a) sei $h = \frac{1}{H_{m-k}} > 0$; mit $t+1 \geqq m+k$ (etwa $t=n-1$) ergibt (4.6) $p_j=0$.

SATZ 5.13: a) Es sei $0 \leqq m < m+k \leqq n$, $0 \leqq m_i \leqq n$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = m+k$, $r \leqq n$; gilt dann für die Krümmungen H_{m_i} $(i=1,..,r)$ und H_m auf $E \in \mathfrak{H}$

$$(-p)^k \prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m \leqq 0,$$

so ist E Sphäre.

b) Es sei $0 \leqq m < m+k \leqq n$, $0 \leqq m_i \leqq n$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$, $r \leqq n$; gilt auf E

$$\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_{m+k}(-p)^k \leqq 0,$$

so ist E Sphäre.

Beweis: Aus (4.7a) folgt mit h=const und $m \geqq s$ (z. B. s=0) die Behauptung, wenn man wie üblich die Vorzeichen der Integranden untersucht. a) ist bewiesen. Für b) benutzen wir (4.7b) mit h=const. und $s+1 \geqq m+k$ (etwa $s=n-1$).

Die Sätze 5.12, 5.13a kann man auch mit Satz 5.10 beweisen; so ist z. B. wegen (3.5) und der Voraussetzung von 5.13a

$$(-p)^k H_{m+k} \leqq (-p)^k \prod_{i=1}^{r} H_{m_i} \leqq H_m ,$$

so daß wegen Satz 5.10 der Satz 5.13 a folgt. Für r=1 ist Satz 5.13 gerade Satz 5.10. Wir notieren zwei Spezialfälle von 5.13a:

I) $m = 0$, $\sum m_i = k$; dann lautet die Ungleichung:

$$(-p)^k \prod_{i=1}^{r} H_{m_i} \leqq 1 ;$$

für r=1, $m_1=k$ ist das noch einmal Satz 5.11a .

II) $m_1 = m_2 = \ldots = m_r$, $r = m+k$; in diesem Fall ist die kennzeichnende Ungleichung

$$(-p)^k \cdot H_1^{m+k} \leqq H_m .$$

§ 6 Kennzeichnungen von Sphären im E^{n+1}

Wir wollen noch einige Bemerkungen zur Kennzeichnung von Sphären im Rahmen der euklidischen Geometrie machen; betrachtet man auf der Hyperfläche neben dem Stützabstand p noch die Nullpunktsentfernung $r = \sqrt{(x^2)}$, so kann man bei entsprechenden euklidischen Beweisen alle in den vorausgegangenen Kennzeichnungen auftretenden Funktionen des Stützabstandes als Funktionen der beiden Variablen r und p ansehen, wobei jetzt Aussagen über die Vorzeichen der partiellen Ableitungen gemacht werden. Der Grund dafür ist eine einfache Beziehung zwischen den Ableitungen von p und r, die man mit den Ableitungsgleichungen der euklidischen Geometrie erhält. Ist nämlich $\mathring{B}_{ik}$ der Tensor der zweiten Fundamentalform, so gilt

(6.1) $$p_k = - \mathring{B}_{k.}^{\ s}(rr_s).$$

Neben den Tensoren $C^{ik}_{(r)}$ müssen dann auch die Tensoren $C^{ij}_{(k)}\ \mathring{B}_{j.}^{\ s}$ auf ihre Definitheit untersucht werden, was man ebenso wie in (2.11) durchführt.[30] Natürlich kann

---

(30) Bei euklidischen Untersuchungen werden die Hauptkrümmungen üblicherweise als Eigenwerte von

(6.2) $$||\tilde{B}_{ik} - K\cdot\tilde{G}_{ik}|| = 0$$

definiert ($\tilde{G}_{ik} = \langle x_i, x_k \rangle$). Das stimmt gerade wieder mit (2.1) überein, wenn man bedenkt, daß im euklidischen Fall aus (1.20) - bis auf das Vorzeichen - der Tensor $\tilde{E}_{ik}$ der dritten Fundamentalform wird, während (1.11) den Tensor $\tilde{B}_{ik}$ der zweiten Fundamentalform ergibt. Die Eigenwerte von

$$||\tilde{E}_{i.}^{\ j} - K\cdot\tilde{B}_{i.}^{\ j}|| = 0$$

stimmen aber mit denen von (6.2) überein. Mit dem Diskriminantentensor und $\tilde{B}_{i.}^{\ j}$ bildet man formal die Tensoren $C^{ij}_{(r)}$ wie in (2.6). Um die Definitheit von $C^{ij}_{(r)}$ zu untersuchen (vgl. Voss, |35|, S. 187), wählt man wie in (2.11) ein spezielles Koordinatensystem im Punkt P; in P gilt:

(6.3a) $$\tilde{G}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \qquad \tilde{B}_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ K_i \text{ für } i = j \end{cases}$$

sowie

man bei euklidischen Resultaten auch die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen herabsetzen. Wir wollen als Beispiel den H_r-p-Satz (Satz 5.1) formulieren; entsprechend verfährt man mit den anderen Sätzen aus § 5.

SATZ 6.1: Es sei $E \in C^3$ eine geschlossene, orientierte Hyperfläche im E^{n+1}; ihre Hauptkrümmungen seien alle positiv. Besteht dann für eine der Krümmungen H_k, $1 \leq k \leq n$, eine Beziehung der Art

$$H_k = G(r,p),\ G \in C^1,\ \frac{\partial G}{\partial r} \leq 0,\ \frac{\partial G}{\partial p} \geq 0,$$

so ist E Sphäre.

Im Fall n = 2, k = 1 hatte K. P. Grotemeyer in |18| die Kennzeichnungen durch

a) $H = f(r^2),\ f \in C^1,\ f'(r) \leq 0,$

b) $H = g(p),\ g \in C^1,\ g'(p) \geq 0$

angegeben[31], die man also jetzt zusammenfassen kann.

Zur Abschwächung der ziemlich starken Voraussetzung $K_r > 0$ für alle r = 1,..,n wird man natürlich die in der Fußnote (13) genannten Möglichkeiten ausnutzen; dazu muß natürlich auch die Definitheit der Tensoren $C^{ik}_{(r)}$ und $C^{ik}_{(r)} B_k^{\ j}$ neu untersucht werden.[32]
Schließlich hatten wir schon in der Einleitung bemerkt, daß die in § 4 entwickelte Methode zur Aufstellung von Integralformeln für die Krümmungsgrößen auch für Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung brauchbar ist; man muß nur die den Formeln (4.1) auch formal entsprechenden Integralformeln aufstellen; die Spezial-

---

(6.3b) $$C^{ij}_{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial K_i} & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Damit untersucht man dann auch die Definitheit von $C^{ij}_{(r)} B_j^{\ k}$.
Durch Wahl der Orientierung des euklidischen Normalenvektors und durch Wahl des Nullpunkts kann man $p < 0$ erreichen.

(31) Beachte Fußnote 16

(32) Für $C^{ik}_{(r)}$ vgl. dazu Voss, |35|, S. 187, S. 209 f., auch im Fall nichtkonvexer geschlossener Flächen.

fälle, die den Formeln (M_r) in § 4 analog sind, findet man bereits bei Hsiung und Feeman (|15|, |21|, |22|); damit hatten beide Autoren dann den H_r-Satz (Satz 5.3) sowie Satz 5.10 im Fall k = 1, m ungerade für Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung bewiesen.

K A P I T E L II

Um zu ähnlichen Kennzeichnungen von Affinsphären im Rahmen der Vektorraumgeometrie zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

a) Man baut eine radiale Krümmungstheorie auf, indem man - analog zu (1.20) - einen Tensor definiert, der eine geeignete Darstellung der Krümmungsgrößen wie in Lemma 2.1 gestattet. Außerdem führt man (s. (7.11a)) noch einen Normalenvektor z ein, der wegen der einfachen Gestalt seiner Ableitungsgleichungen eine zu § 2 analoge Darstellung der Krümmungsgrößen erlaubt; die Normalisierung der Hyperfläche durch z ist allerdings nicht relativ. Hat man dann die zu (4.1) entsprechenden verallgemeinerten Minkowskiformeln der radialen Theorie entwickelt, so ist die Aufstellung weiterer radialaffiner Integralformeln zur Kennzeichnung von Affinsphären nach der Methode des Paragraphen 4 klar.

b) Man deutet die Grundformeln und die Ergebnisse aus Kapitel I äquiaffin; dann ist in (1.17) |Q| = 1, so daß mit den entsprechenden Folgerungen § 1 die Grundformeln der äquiaffinen Theorie wiedergibt. Entwickelt man systematisch die Beziehungen zwischen den äquiaffinen und den zentroaffinen Größen, so gewinnt man Integralformeln und z. T. Ergebnisse der radialen Theorie direkt aus § 4.(33)

(33) Diese Möglichkeit, Ergebnisse innerhalb der affinen Geometrien zu übertragen, kann man natürlich auch für andere Resultate verwenden, so etwa für die Charakterisie-

Zur Durchführung von a) und b) stellen wir in § 7 die Grundformeln der Geometrie im Vektorraum zusammen. In § 8 entwickeln wir die zugehörige Krümmungstheorie. § 9 bringt zuerst diejenigen (jetzt äquiaffinen) Formeln aus § 1, die sich wegen $|Q| = 1$ formal geändert haben; anschließend stellen wir die Beziehungen zwischen äquiaffinen und radialaffinen Größen zusammen. Soweit die Beziehungen dieses Paragraphen nicht schon bekannt sind (Salkowski |29|, Schirokov |31|), wird ihre Herleitung kurz angedeutet. Sie bereitet prinzipiell keinerlei Schwierigkeiten. Die Entwicklung der verallgemeinerten Minkowskiformeln innerhalb der radialen Theorie werden wir in § 10 angeben; zugleich zeigen wir, wie mit Hilfe der Beziehungen aus § 9 diese Integralformeln aus denen des Paragraphen 4 gewonnen werden können. In § 11 bringen wir schließlich eine Zusammenstellung der interessantesten Ergebnisse, die innerhalb der radialen Theorie eine Aussage über die Kennzeichnung von Affinsphären machen.

§ 7 Grundformeln der radialen Theorie (34)

Die radialaffine Theorie erhält man als Spezialfall der relativen Geometrie, indem man als normalisierenden Vektor den Flächenvektor $x(u^i)$ wählt. Allerdings fällt dann der in (1.20) definierte Tensor B_{ik} mit dem Tensor g_{ik} der radialen Grundform zusammen, d.h. die Eigenwerte von (2.1) sind konstant (und zwar gleich -1). Wir müssen also weitere Größen definieren, die geeignet sind, das Krümmungsverhalten einer Fläche innerhalb der radialaffinen Geometrie zu beschreiben.
Die Formeln (1.1) bis (1.19) bleiben - entsprechend radialaffin interpretiert - im wesentlichen ungeändert. Wie

---

rung von Quadriken durch ihre Geodätischen innerhalb der äquiaffinen bzw. radialaffinen Geometrie. (Wegen radialaffiner Ergebnisse s. Laugwitz, |25|, Kap. II, § 4.)
(34) s. z. B. Schirokov, Kap. 4.

in § 1 sei also F ein durch den Vektor $x(u^1)$ dargestelltes Hyperflächenstück im R^{n+1}; für $x(u^i)$ mögen die in § 1 gemachten Voraussetzungen gelten. Der Kovektor ζ der Tangentialebene wird jetzt durch

(7.1) $$\langle \zeta , x_i \rangle = 0$$

(7.2) $$\langle \zeta , x \rangle = 1$$

festgelegt. Also gilt auch

(7.1a) $$\langle \zeta_i , x \rangle = 0 .$$

Mit

(7.3) $$w = |x, x_1, .., x_n| \neq 0$$

ergibt sich die Darstellung

(7.4) $$\zeta = w^{-1} \cdot [x_1, .., x_n] .$$

Durch

(7.5) $$g_{ik} = -\langle \zeta_i , x_k \rangle = \langle \zeta , x_{i|k} \rangle = \langle \zeta_{i|k} , x \rangle$$

erhalten wir dann auf F den Tensor der radialaffinen Grundform, auf den wir wieder die üblichen Prozesse der inneren Geometrie beziehen[35]; mit der Determinante

(7.6) $$g = ||g_{ik}||$$

definieren wir analog zu (1.12) den Diskriminantentensor.

(7.7) $$a_{ikl} = -\langle \zeta_l , x_{i;k} \rangle$$
$$= \langle \zeta , x_{i;k;l} \rangle = \langle \zeta_{i;k} , x_l \rangle = -\langle \zeta_{i;k;l} , x \rangle$$ [36]

ist der symmetrische Tensor der kubischen Fundamentalform. Formal abweichend von § 1 definieren wir den Tschebyscheffvektor durch [37]

(7.8) $$v_i = \frac{2}{n+2} g^{jk} a_{ijk} .$$

Der radiale Affinnormalenvektor wird üblicherweise durch

(7.9) $$\eta = \frac{1}{n} g^{ik} x_{i;k}$$

erklärt[38]; für die Entwicklung der Krümmungstheorie erweist sich aber der Vektor

(7.10) $$z = \eta + \frac{1}{2n}(n-2) v^i x_i$$

wegen der einfachen Gestalt seiner Ableitungsgleichungen

---

(35) wegen § 9 bezeichnen wir die kovariante Differentiation bezüglich g_{ik} durch ein Semikolon.

(36) wegen (7.5) und $g_{il;k} = 0$

(37) das hat rechentechnische Vorteile, was aus (7.25) und (7.25a) und den Formeln des § 8 deutlich wird.

(38) vgl. für n=2: |29| ,S.132, für $n \geq 2$ |25|,Kap.II, §6.

(7.23) als geeigneter; für beide Vektoren gilt

(7.11) $$\langle z,\zeta\rangle = 1 = \langle \eta,\zeta\rangle \quad .$$

Man zeigt leicht, daß

(7.12) $$p = w\cdot|\|l_{ik}\|\|^{\frac{-1}{n+2}}$$

gerade der in (1.27) definierte äquiaffine Stützabstand ist; p ist keine radialaffine Invariante. Mit (7.7), (7.8) und (7.10) ergibt sich

(7.13) $$v_i = \langle z_i,\zeta\rangle = -\langle z,\zeta_i\rangle ;^{(39)}$$

$$^{(40)}$$

(7.13a) $$= \frac{p_i}{p} \quad .$$

Wir definieren außerdem den symmetrischen Tensor

(7.15) $$b_{ij} = -\langle z_i,\zeta_j\rangle - v_i v_j \quad ,$$

der jetzt die Aufgabe von B_{ij} aus (1.20) übernimmt. Ist

(7.16) $$q = \frac{w}{\sqrt{g}} = \sqrt{|p|^{n+2}} \quad ,$$

so wird

(7.16a)

$$\frac{q_i}{q} = \frac{n+2}{2} v_i \quad ,$$

also mit (7.4)

(7.17) $$[x_{i_1},..,x_{i_n}] = q\cdot\varepsilon_{i_1..i_n}\cdot\zeta$$

und

(7.18) $$|z,x_{i_1},..,x_{i_n}| = q\cdot\varepsilon_{i_1..i_n} \quad .$$

Ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten ergibt dann wegen (7.5), (7.10) und (7.17)

(7.19) $$[z,x_{i_1},..,x_{i_{r-1}},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}] =$$

$$= q\cdot\varepsilon_{i_1..i_{r-1}}{}^{j}{}_{i_{r+1}..i_n}(-1)^{r-1}(\zeta_j + v_j\zeta) \quad ,$$

so daß wegen (7.1) und (7.2) folgt

(7.20) $$|x,z,x_{i_1},..,x_{i_{r-1}},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}| = q\varepsilon_{i_1..i_{r-1}}{}^{j}{}_{i_{r+1}..i_n}\cdot v_j(-1)^{r-1}$$

---

(39) Die Hyperfläche wird also durch z nicht relativ normalisiert, da sonst $v_i = 0$ gelten müßte. Bei der formalen Behandlung der radialen Krümmungstheorie übernimmt aber der Vektor z die Rolle von y aus § 1.

(40) Das folgt etwa mit (7.3), (7.4), (7.5) und (7.10).

Die Ableitungsgleichungen lauten:

(7.21) $$x_{i;k} = a_{ik.}^{\ \ j} \cdot x_j + g_{ik} \cdot x$$

(7.22) $$\zeta_{i;k} = -a_{ik.}^{\ \ j} \cdot \zeta_j + g_{ik} \cdot \zeta$$

(7.23) $$z_i = b_{i.}^{\ j} \cdot x_j + v_i \cdot z \quad .$$

Damit läßt sich jetzt auch

(7.24) $$v_{i;k} = b_{ik} + v_i v_k - a_{ik.}^{\ \ j} v_j - g_{ik}$$

bestimmen. Aus den Ableitungsgleichungen folgen die Darstellungen

(7.25) $$\eta = \frac{n+2}{2n} v^j \cdot x_j + x$$

(7.25a) $$z = v^j \cdot x_j + x \quad .$$

§ 8 Darstellungen der radialen Krümmungsgrößen

Die Einführung des Tensors b_{ij} in (7.15) ermöglicht die Definition von Krümmungsgrößen analog zu (2.2). Die Eigenwerte k_r (r=1,..,n) von

(8.1) $$||b_{i.}^{\ j} - k \cdot g_{i.}^{\ j}|| = 0$$

werden als r-te radialaffine Hauptkrümmungen der Hyperfläche F bezeichnet, die normierte elementarsymmetrische Funktion h_r heißt r-te radialaffine Krümmung (vgl. (2.2)). Es gilt analog zu Lemma 2.1 die Darstellung(41)

(8.2) $$h_r = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \cdots j_r i_{r+1} \cdots i_n} \cdot b_{i_1.}^{\ \ j_1} \cdots b_{i_r.}^{\ \ j_r}$$

Sei

(8.3) $$n! \cdot c_{(r)}^{ij} = \varepsilon^{i i_2 \cdots i_n} \cdot \varepsilon^{j}_{\ \cdot j_2 \cdots j_r i_{r+1} \cdots i_n} \cdot b_{i_2.}^{\ \ j_2} \cdots b_{i_r.}^{\ \ j_r} \ ;$$

dann folgt aus (7.23), (7.17) und (8.2)

(8.4) $$\varepsilon^{i_1 \cdots i_n} [z_{i_1}, .., z_{i_r}, x_{i_{r+1}}, \cdots x_{i_n}] =$$

$$= q \cdot n! \cdot (h_r \cdot \zeta + c_{(r)}^{ij} v_i (\zeta_j + \zeta \cdot v_j))$$

---

(41) Damit auf elliptisch gekrümmten Flächenstücken $h_{r \geq} 0$ ist, unterscheiden sich k in (8.1) und h_r in (8.2) von (2.1) bzw. (2.3) formal durch die Vorzeichen (-1) bzw. $(-1)^r$.

und mit (7.1), (7.2)

$$(8.5)\qquad \varepsilon^{i_1..i_n}\,|x,z_{i_1},..,z_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}| =$$

$$= q\cdot n!(h_r + r\cdot c^{ij}_{(r)} v_i v_j)\ .$$

Wegen (7.23), (7.20) und (8.3) gilt

$$(8.6)\qquad \varepsilon^{ii_2..i_n}|x,z,z_{i_2},..,z_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}| = c^{ij}_{(r)} v_j\cdot q\cdot n!\ .$$

Schließlich notieren wir noch die wichtigen Beziehungen

$$(8.7)\qquad c^{ij}_{(r)}\, b_{ij} = h_r$$

$$(8.8)\qquad c^{ij}_{(r)}\, g_{ij} = h_{r-1}\ .$$

§ 9 Beziehungen äquiaffiner und radialaffiner Größen

Beschreibt $y(u^i)$ in § 1 das Affinkrümmungsbild von $x(u^i)$, so sind die Formeln in § 1 gerade die der äquiaffinen Geometrie. Insbesondere gilt daher:

$$(1.4')\qquad w = |y,x_1,..,x_n| = \sqrt{g}$$

$$(1.9')\qquad \xi = \sqrt{g^{-1}}\cdot[x_1,..,x_n]\ .$$

Die Beziehung

$$(1.17')\qquad |Q| = 1$$

berücksichtigen wir in (1.16), (1.18), (1.19), (1.31), (2.5), (2.13) und (2.14). Aus (1.22) wird die Apolaritätsbedingung

$$(1.22')\qquad V_j = \frac{1}{n} G^{ik} A_{jik} = 0.$$

Für y gilt die Darstellung

$$(1.26')\qquad y = \frac{1}{n} G^{ik} x_{ijk}.$$

$$(1.27')\qquad p = \langle x,\xi\rangle$$

ist der affine Stützabstand.

Viele der folgenden Beziehungen zwischen den äquiaffinen und den radialaffinen Größen sind für $n = 2$ bereits von Salkowski |29| angegeben worden, für $n \geq 2$ z. T. von

Schirokov (|31|, §§19-24). Beachtet man außerdem, daß (9.1) eine konforme Beziehung zwischen den beiden durch G_{ik} bzw. g_{ik} auf der Hyperfläche gegebenen Riemannschen Geometrien induziert, so ist der Zusammenhang zwischen entsprechenden Größen der inneren Geometrien bekannt.(42)

Die in (1.27) und (7.13) definierten Größen stimmen überein, so daß wir für beide die Bezeichnung p beibehalten wollen. Wegen (1.3). (1.10) sowie (7.3) gilt daher

(9.1) $$G_{ik} = p \cdot g_{ik}$$

(9.2) $$p \cdot G^{ik} = g^{ik} .$$

Zwischen den äquiaffinen bzw. radialaffinen Christoffelgrößen Γ_{ikl} bzw. γ_{ikl} besteht die Relation

(9.3) $$\Gamma_{ikl} = p(\gamma_{ikl} + s_{ikl}),$$

wobei s_{ikl} durch

(9.4) $$2s_{ikl} = -g_{ik}v_l + g_{il}v_k + g_{kl}v_i$$

definiert ist; wegen (9.2) folgt

(9.5) $$\Gamma_{ij.}^{\ k} = \gamma_{ij.}^{\ k} + s_{ij.}^{\ k} ;$$

dabei ist das Heben und Senken von Indizes bei äquiaffinen bzw. radialaffinen Tensoren mit den jeweiligen Maßtensoren G_{ik} bzw. g_{ik} vorzunehmen. Mit (9.5) lassen sich die kovarianten Differentiationsprozesse vergleichen

(9.6) $$P^{r_1..r_\sigma}_{t_1..t_\mu\|i} = P^{r_1..r_\sigma}_{t_1..t_\mu;i} + \sum_{\alpha=1}^{\sigma} P^{r_1...r_{\alpha-1}jr_{\alpha+1}\cdot r_\sigma}_{t_1..t_\mu} s_{ji.}^{\ r_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{\mu} P^{r_1..r_\sigma}_{t_1..t_{\beta-1}\nu t_{\beta+1}..t_\mu} s_{t_\beta i.}^{\ \nu}$$

Damit ist jetzt auch der Weg für die Beziehungen zwischen den Krümmungstensoren und den Skalarkrümmungen gebahnt, die wir aber nicht benötigen. Wegen

(9.7a) $$g^{ik} \cdot s_{ikj} = \frac{2-n}{2} \cdot v_j$$

und

(9.7b) $$g^{kj} \cdot s_{ikj} = g^{kj} \cdot s_{kij} = \frac{n}{2} \cdot v_i$$

(42) vgl. etwa Eisenhart, |14|, § 28

wird für ein Vektorfeld $v_j(u^i)$

(9.8) $\quad p\cdot G^{ik}\cdot v_{i\|k} = g^{ik}\cdot v_{i;k} + \frac{n-2}{2}\cdot v^j v_j,$

also insbesondere

(9.9) $\quad p\cdot y = z = \eta + \frac{n-2}{2n} v^j x_j$. (43)

Die Kovektoren der Tangentialebene sind durch

(9.10) $\quad \xi = p\cdot\zeta$

verbunden. Mit (9.1) und (1.31') erhalten wir den Zusammenhang zwischen den Flächenelementen

(9.11) $\quad do = \sqrt{|G|}\, du^1\wedge\ldots\wedge du^n = \sqrt{|\mathfrak{P}^n|g|}\, du^1\wedge\ldots\wedge du^n$

$= \sqrt{|p|^n}\, d\omega$.

In der Krümmungstheorie gelten die folgenden wichtigen Beziehungen

(9.12a) $\quad B_{ik} = b_{ik}$

(9.12b) $\quad p\cdot B_{i.}^{k} = b_{i.}^{k}$ (44)

(9.13) $\quad (-p)K_r = k_r$

(9.14) $\quad (-p)^r H_r = h_r$

(9.15) $\quad p^r\cdot {}_{(r)}C^{ij} = {}_{(r)}c^{ij}$

§ 10 Radialaffine Integralformeln

Da die Normalisierung von $x(u^i)$ durch den Vektor z in (7.11a) nicht relativ ist, ist zu erwarten, daß die angestrebten, (4.1) entsprechenden "allgemeinen Minkowskiformeln" in der Vektorraum - Geometrie sich auch formal von (4.1) unterscheiden.

Bei der Herleitung innerhalb der radialaffinen Theorie gehen wir von (8.5) aus und multiplizieren mit einer Ortsfunktion $g = g(u^i) \in C^1$:

$$(h_r + r\,{}_{(r)}c^{ij}v_i v_j)\cdot q\cdot n!\cdot g = \varepsilon^{i_1\ldots i_n}|x, z_{i_1},\ldots,z_{i_r}, x_{i_{r+1}},\ldots,x_{i_n}|g$$

---

(44) man beachte den Zusatz zu (9.5)

(43) Daraus folgt sofort der Laugwitzsche Satz (|25|, Satz II,6.4), daß im Fall n>2 genau für Affinsphären äquiaffiner und radialaffiner Normalenvektor in eine Richtung fallen.

$$= \cdot \{\varepsilon^{i_1..i_n}|x,z,z_{i_2},..,z_{i_r},x_{i_{r+1}},...,x_{i_n}|\cdot g\}\,\|i_1 -$$

$$- \varepsilon^{i_1..i_n}|x_{i_1},z,z_{i_2},...,z_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}|\cdot g$$

$$- \varepsilon^{i_1..i_n}|x,z,z_{i_2},..,z_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}|\cdot g_{i_1}\,.$$

Wegen der Ableitungsgleichungen (7.22) sowie (7.17),(7.19), (8.2) und (8.6) erhält man

$$(h_r + r\cdot c^{ij}_{(r)}\, v_i v_j)q\cdot n!\cdot g = \{..\}\|i_1 + h_{r-1}\cdot n!\cdot g\cdot q$$
$$- c^{ij}_{(r)} v_j g_i \cdot n!\cdot q\,,$$

so daß Integration über eine geschlossene Fläche unter Berücksichtigung des allgemeinen Stokesschen Satzes ergibt

$$(10.1)\qquad \int (h_{r-1} - h_r)\cdot g\cdot q\, d\omega =$$

$$= \int (g\cdot r\cdot v_i v_j + v_i g_j)\cdot c^{ij}_{(r)}\cdot q\, d\omega \qquad , (r=1,..,n).^{(45)}$$

Benutzt man die Beziehungen aus § 9, so erhält man (10.1) aus (4.1), indem man in (4.1) $f = (-p)^r.g$ setzt und (2.12), (7.24), (9.11), (9.14), (9.15) berücksichtigt.

Mit der Aufstellung der "verallgemeinerten Minkowskiformeln" (10.1) der radialaffinen Theorie ist der Weg zur Gewinnung weiterer Integralformeln für die Krümmungsgrößen mit der Methode aus § 4 gebahnt. Dieser Weg ist einfacher anzuwenden, als wenn man die Umrechnungen der Integralformeln aus § 4 mit den Beziehungen des Paragraphen 9 vornimmt, zumal die Form der "Minkowskiglieder" in (10.1) höchst einfach ist: $(h_{r-1} - h_r)$. Dagegen lassen sich viele radialaffine Aussagen ent-

---

(45) Für die Anwendungen wird man (10.1) auch oft in abgewandelter Form benutzen, indem man $g(u^i).q = h(u^i)$ setzt und die rechte Seite mit (7.16a) entsprechend umformt.

sprechend zu den Sätzen des § 5 sehr einfach direkt aus den dortigen Ergebnissen ablesen; da jetzt dieser Weg einfacher ist, werden wir ihn ausnutzen. Bei der Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der radialen Theorie können wir uns daher mit Hinweisen begnügen, wie man die neuen Aussagen auf bekannte Ergebnisse zurückführt oder wie man sie aus Integralformeln gewinnt. Gleichzeitig weisen wir nochmals auf den Satz von Deicke hin, wonach die folgenden Sätze des § 11 auch als Kennzeichnungen von Ellipsoiden ausgesprochen werden können.(46)

§ 11 Radialaffine Kennzeichnungen der Affinsphären

Wir betrachten wieder die Flächenklasse $\mathfrak{H}$ aus § 5. Für $E \in \mathfrak{H}$ gilt dann

(11.A) g_{ik} ist negativ definit,
(11.B) die Tensoren $c^{ik}_{(r)}$ sind negativ definit (r=1,..,n),
(11.C) $h_r > 0$ für alle r.

Dabei sind (11.B) und (11.C) wieder dann erfüllt, wenn die radialen Hauptkrümmungen k_r alle positiv sind. Daß die Aussagen (11.A) - (11.C) für $E \in \mathfrak{H}$ gelten, prüft man leicht mit (9.1), (9.14) und (9.15) nach.

SATZ 11.1: Es gebe ein r, $1 \leqq r \leqq n$, so daß auf $E \in \mathfrak{H}$ gilt:

$$h_r = g(p) \text{ mit } g \in C^1,\ g'(p) \geqq 0.$$

Dann ist E Affinsphäre.

Beweis: Mit (9.14) führt man Satz 11.1 auf Satz 5.1 zurück, denn für $H_r = (-p)^{-r} \cdot g(p) = G(p) \in C^1$ gilt

$$G'(p) = r \cdot g(p)(-p)^{-(r+1)} + g'(p) \cdot (-p)^{-r} \geqq 0.$$

Nach (11.C) ist nämlich $h_r = g(p) > 0$.

Satz 11.1 kann man auch mit Integralformeln beweisen, die (4.3b) und (4.4) entsprechen; dafür ist (10.1) noch geeignet umzuformen.

---

(46) vgl. Fußnote 20.

Insbesondere folgt aus Satz 11.1 der h_k-Satz, der übrigens mit Satz 5.2 gleichwertig ist:

SATZ 11.2: (h_k-Satz) Gilt für ein k, $1 \leq k \leq n$, auf $E \in \mathfrak{h}$

$$h_k = \text{const.},$$

so folgt $h_k = 1$ und E ist Affinsphäre.

SATZ 11.3: Es sei $1 \leq r < r+t \leq n$. Gilt dann für zwei Krümmungen h_r, h_{r+t} auf $E \in \mathfrak{h}$

$$\frac{h_{r+t}}{h_r} = g(p) \quad \text{mit } g \in C^1 \text{ und } g'(p) \geq 0,$$

so ist E Affinsphäre.

Beweis: Mit $H_{r+t} \cdot H_r^{-1} = (-p)^{-t} \cdot g(p) = G(p) > 0$ ist Satz 11.3 auf Satz 5.6 zurückgeführt.

Schließlich ist die Aussage in Satz 5.10 gleichwertig damit, daß eine Affinsphäre im Rahmen der radialen Geometrie durch eine der beiden Beziehungen

a) $h_{m+k} - h_m \leq 0$ b) $h_{m+k} - h_m \geq 0$

gekennzeichnet wird. Für m = 0 hat man die Charakterisierung durch

a') $h_k \leq 1$ b') $h_k \geq 1$.

Insbesondere gibt es auf $E \in \mathfrak{h}$ also für jedes k, $1 \leq k \leq n$, stets Punkte, in denen $h_k = 1$ gilt. Die letzte Aussage zusammen mit Satz 11.2 kann man als Analogon eines Münznerschen Satzes über die radiale Skalarkrümmung s ansehen. (|28|, S. 55). Diese Ergebnisse kann man natürlich auch aus (10.1) herleiten, indem man entsprechend über g verfügt und über r summiert (vgl. (4.5)). - Interessant ist übrigens noch ein Spezialfall von Satz 5.13, den wir mit (9.14) erhalten:

Satz 11.4: Sei $1 \leq r \leq n$. Gilt für das Produkt r beliebiger Krümmungen H_{m_i} mit $1 \leq \sum_{i=1}^{r} m_i \leq n$ auf $E \in \mathfrak{h}$ stets

$$\prod_{i=1}^{r} h_{m_i} \leq 1,$$

so ist E Affinsphäre. Dabei müssen die h_{m_i} nicht notwendig verschieden sein.

K A P I T E L III

§ 12 Kennzeichnungen berandeter Flächen

Die Integralformeln der Paragraphen 4 und 10 gelten für geschlossene Flächen. Um Integralformeln für berandete Flächen zu erhalten, müssen wir in der Herleitung von (4.1) und (10.1) die Randintegrale berücksichtigen. Als Anwendung derartiger Integralformeln erhalten wir unter geeigneten Randbedingungen Kennzeichnungen berandeter Flächen. Wir begnügen uns im folgenden damit, im Anschluß an (4.1) einige der Integralformeln aus § 4 mit den zugehörigen Randintegralen anzugeben. Ähnlich verfährt man dann in der radialaffinen Geometrie.(47) Für die Anwendungen stellen wir die für die Kennzeichnung berandeter Flächen typischen Randbedingungen auf. Als Beispiel formulieren und beweisen wir schließlich einen neuen H-K-Satz für berandete Flächen.

Integriert man (4.b) für ein nichtgeschlossenes Flächenstück mit Rand ∂F, so erhält man für $r=1,..,n$ mit (1.32)

$$(12.1') \qquad \int_F (H_{r-1} + p\cdot H_r)\cdot f \, do = \int_F D^{ij}_{(r)} p_i f_j \, do - \int_F f\cdot(\omega_{i_2..i_n})_{(r)} \, du^{i_2} \wedge .. \wedge du^{i_n}.$$

Dabei ist $(\omega_{i_2..i_n})_{(r)}$ erklärt durch

$$(12.a) \qquad (\omega_{i_2..i_n})_{(r)} = |x,y,y_{i_2},..,y_{i_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}|\frac{1}{n!}$$

$$= |x,y,x_{j_2},..,x_{j_r},x_{i_{r+1}},..,x_{i_n}|\cdot B_{i_2}^{j_2} \cdot \ldots \cdot B_{i_r}^{j_r} \cdot \frac{1}{n!} =$$

---

(47) Die folgenden Überlegungen gelten auch wieder entsprechend für Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung.

$$= Q\cdot\varepsilon^{k}_{\cdot j_2..j_r i_{r+1}..i_n}\cdot p_k\cdot B_{i_2\cdot}^{\ \ j_2}\ \dots\ B_{i_r\cdot}^{\ \ j_r}\frac{1}{n!}\ .$$

Beschreibt man die (n-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit ∂F durch (n-1) unabhängige lokale Parameter t^ν:

$$u^i = u^i(t^\nu),\ \nu = 1,..,n-1,$$

so kann man die auftretenden Randintegrale

$$\int_{\partial F}(f\cdot\omega_{(r)}) := \int_{\partial F} f\cdot(\omega_{i_2..i_n}(u^i))_{(r)}du^{i_2}\wedge\dots\wedge du^{i_n}$$

in der Form

$$(12.b)\qquad \int_{\partial F}(f\cdot\omega_{(r)}) = \int_{\partial F} f\cdot(\omega_{i_2..i_n}(t^\nu))_{(r)}\,|D|\,dt^1\wedge..\wedge dt^{n-1}$$

$$=: \int_{\partial F}(\overline{f\cdot\omega_{(r)}}) \qquad (48)$$

schreiben, wobei die Funktionaldeterminante

$$(12.c)\qquad D = \left|\frac{\partial(u^{i_2},\dots,u^{i_n})}{\partial(t^1,\dots,t^{n-1})}\right| = D^{i_2..i_n}$$

auf ∂F nirgends verschwinde. Aus (12.1') wird

$$(12.1'')\qquad \int_F (H_{r-1} + p\cdot H_r)f\ do = \int_F D^{ij}_{(r)}p_i f_j do - \int_{\partial F}(\overline{f\cdot\omega_{(r)}})\ .$$

Mit (12.1'') können wir jetzt auch in den restlichen Integralformeln des Paragraphen 4 die Randintegrale berücksichtigen. So lauten - als Beispiele - (4.2a) und (4.2b):

$$(12.2a)\qquad \int_F (H_r H_{r+t-1} - H_{r+t}H_{r-1})f do = \int_F D^{ij}_{(r+t)}p_i(fH_r)_j do$$

$$- \int_{\partial F}(\overline{H_r f\cdot\omega_{(r+t)}}) - \int_F D^{ij}_{(r)}p_i(fH_{r+t})_j do + \int_{\partial F}(\overline{H_{r+t}f\cdot\omega_{(r)}})$$

mit $0<r<r+t\leq n$ und

---

(48) Der Querstrich weist auf die Parameter t^ν hin.

$$(12.2b)\quad \int_F (H_{r+1}H_{r+t} - H_{r+t+1}H_r)\, p\, f\, do =$$

$$= \int_F (H_{r+t} f)_j D^{ij}_{(r+1)} p_i\, do - \int_F (H_r f)_j D^{ij}_{(r+t+1)} p_i\, do$$

$$- \int_{\partial F} \overline{(H_{r+t} \cdot f \cdot \omega_{(r+1)})} + \int_{\partial F} \overline{(H_r \cdot f \cdot \omega_{(r+t+1)})}$$

mit $0 \leq r < r+t < n$. Im Fall n=2, r=0, t=1, f=const., $H = H_1 = \text{const.}$ stammt die Formel (12.2b) von Grotemeyer (s. |16|, S. 42, (a)).(49)

Für die Anwendung der Integralformeln zur Kennzeichnung offener Flächen wird man den Rändern Bedingungen der Art auferlegen, daß die Summe der Randintegrale verschwindet; für (12.2a) etwa heißt das:

$$\int_{\partial F} \bar{f} \cdot (\overline{H_{r+t}{}^{\omega}(r)} - \bar{H}_r \bar{\omega}_{(r+t)}) = 0,$$

was sicher dann der Fall ist, wenn

$$D^{i_2..i_n} \cdot (\bar{H}_{r+t} \overline{(\omega_{i_2..i_n})(r)} - \bar{H}_r \overline{(\omega_{i_2..i_n})(r+t)}) = 0$$

gilt; analog verschwinden die Randintegrale in (12.2b) für

$$D^{i_2..i_n} \cdot (\bar{H}_r \overline{(\omega_{i_2..i_n})(r+t+1)} - \bar{H}_{r+t} \overline{(\omega_{i_2..i_n})(r+1)}) = 0.$$

Die Sätze des Paragraphen 5 sind für offene Flächen entsprechend mit derartigen Randbedingungen zu formulieren; wir wollen als Beispiel Satz 5.6 betrachten; um die Randbedingungen anschaulich zu machen, wählen wir n=2.

An die Stelle der Voraussetzungen (5.A) - (5.E) treten die folgenden Bedingungen für das Flächenstück F:

(12.A) $F \in C^5$ sei orientierbar;

(12.B) G_{ik} sei positiv definit auf F;

(12.C) die Stützfunktion p habe in jedem von der Randkurve $C \in C^1$ begrenzten Gebiet der Fläche F negatives Vorzeichen;

---

(49) dabei beachte man wieder die Vorzeichendefinition des Stützabstandes in | 16 |.

(12.D) $D^{ij}_{(r)}$ sei positiv definit für alle r;
(12.E) es sei $H_r > 0$.

Dabei können wir bei der Anwendung von (12.2a) wieder auf die Voraussetzung (12.C) verzichten (vgl. S. 31). Statt H_1 und H_2 wollen wir im Fall n=2 wieder H und K schreiben; die Randkurve C habe die Parameterdarstellung $u^i = u^i(t)$; abkürzend sei

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x_i \cdot \frac{du^i}{dt}$$

SATZ 12.1: Für das offene Flächenstück F mit der Randkurve C gelte (12.A), (12.B), (12.D) und (12.E). Ist dann auf F die stetig differenzierbare Beziehung

$$\frac{K}{H} = G(p) \text{ mit } G'(p) \geq 0$$

erfüllt und gilt längs des Randes C

$$\dot{y} = \frac{K}{H}\dot{x},$$

so ist F Stück einer Sphäre.

Beweis: (12.2a) lautet für n=2, r=1, t=1:

$$\int_F (H^2 - K)\cdot f \, do = \int_F D^{ij}_{(2)} p_i (f\cdot H)_j \, do -$$

$$- \frac{1}{2}\int_F G^{ij} p_i (f\cdot K)_j \, do + \frac{1}{2}\int_{\partial F} f\cdot [x,y]\cdot(K\cdot\dot{x} - H\cdot\dot{y}) \, dt.$$

Wir wählen wieder $f = \frac{1}{H} > 0$ (wegen (12.E)), so daß $(f\cdot H)_j = 0$ ist. Mit (12.D) und mit der Voraussetzung folgt wie üblich $H^2 - K = 0$.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S (50)

|1| A. AEPPLI, On the uniqueness of compact solutions for certain elliptic differential equations, Proc. Am. Math. Soc. 11, 1960, 826-32

|2| A . D. ALEKSANDROV, A general uniqueness theorem for closed surfaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 19, 1938, 227-229

|3| -----, On uniqueness theorems for closed surfaces, l.c. 22, 1939, 99-102

|4| -----, Uniqueness theorems for surfaces in the large I, American Math. Soc. Transl. (2), 21, 1962, 341-354

|5| -----, Uniqueness Theorems ... II, l.c.,S.354-88

|6| -----, Uniqueness Theorems ...III, l.c.,S.389-403

|7| A. D. ALEKSANDROV und J. A. VOLKOV, Uniqueness theorems ... IV, l.c., S. 403-411

|8| A. D. ALEKSANDROV, Uniqueness theorems ... V, l.c., S. 412-416

|9| E. F. BECKENBACH und R. BELLMANN, Inequalities, Ergebnisse d. Math. 30, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961

|10| W. BLASCHKE, Differentialgeometrie I, 3. Aufl., Berlin 1930

|11| -----, Differentialgeometrie II, 1. u. 2. Aufl., Berlin 1923

|12| P. BULLEN, M. MARCUS, Symmetric means and matrix inequalities, Proc. Am. Math. Soc.12, 1961, 285-290

---

(50) Die Arbeiten |4|-|8| von Aleksandrov werden stets nach der englischen Übersetzung zitiert. Sie sind übersetzt worden aus: Vestnik Lening. Univ.11,1956,no 19, 5-19; 12, 1957, no 7, 15-44; 13, 1958, no 7, 14-26; 13,1958, no 13, 27-34; 13,1958, no 19, 5-8.

|13| A. DEICKE, über die Finslerräume mit $A_1 = 0$, Archiv Math. 4, 1953, 45-51

|14| L. P. EISENHART, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, 4. ed., 1960

|15| G. F. FEEMAN und C. C. HSIUNG, Characterizations of Riemann n-spheres, Amer. Journ. Math. 81, 1959, 691-708

|16| K. P. GROTEMEYER, Die Integralsätze der affinen Flächentheorie, Archiv Math. 3, 1952, 38-43

|17| -----, Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären, Archiv Math 3, 1952,307-310

|18| -----, Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel, Archiv Math. 4, 1953, 230-233

|19| G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, Inequalities, 2. ed., Cambridge Univ. Press 1959

|20| H. HOPF, Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, Math. Nachr. 4, 1951, 232-249

|21| C. C. HSIUNG, Some integral formulas for closed hypersurfaces, Math. Scand. 2, 1954, 286-294

|22| -----, Some integral formulas for closed hypersurfaces in Riemannian spaces, Pacific Journal Math. 6, 1956, 291-299

|23| T. KUBOTA, Über die konvex-geschlossenen Mannigfaltigkeiten im n-dim. Raum, Tôhoku Sc. Reports, ser. 1, 14, no 1, 1925, 85-99

|24| -----, Über Eibereiche im n-dim. Raum, Tôhoku Sc. Reports, ser. 1, 14, no 4, 1925

|25| D. LAUGWITZ, Beiträge zur affinen Flächentheorie mit Anwendungen auf die allgemein metrische Differentialgeometrie, Habil. München 1959, Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss., Kl. math.-nat., Neue Folge, Heft 93

|26| H. LEWY, On differential geometry in the large, Trans. Am. Math. Soc. 43, 1938, 258-270

|27| L. MIRSKY, An introduction to Linear Algebra, Oxford 1955

|28| H. F. MÜNZNER, Die Poincarésche Indexmethode und ihre Anwendungen in der affinen Flächentheorie im Großen, Dissertation, FU Berlin 1963

|29| E. SALKOWSKI, Affine Differentialgeometrie, Berlin - Leipzig 1934

|30| W. SCHERRER, Integralsätze der Flächentheorie, Comm. Math. Helv. 19, 1946, 105-114

|31| P. A. und A. P. SCHIROKOV, Affine Differentialgeometrie, Leipzig 1962

|32| W. SÜSS, Zur relativen Differentialgeometrie I, Japanese Journal Math. 4, 1927, 57-75

|33| -----, Zur relativen Differentialgeometrie V, Über Eihyperflächen im R^{n+1}, The Tôhoku Math. Journ. 31, 1929, 202-209

|34| -----, Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K. P. Grotemeyer, Archiv Math. 3, 1952, 311-313

|35| K. VOSS, Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen, Math. Ann. 131, 1956, 180-218

Lebenslauf

Als zweiter Sohn des Baurats Ernst Simon und seiner Ehefrau Frieda, geb. Mönnig, wurde ich am 31. 8. 1938 in Liegnitz (Schlesien) geboren. 1942 zogen wir nach Neustadt in Westpreußen, wo ich im Herbst 1944 eingeschult wurde. Im Januar 1945 wurden wir von Neustadt vertrieben. Nach verschiedenen Zwischenaufenthalten in der Ostpriegnitz und in Mecklenburg kamen wir schließlich im März 1946 nach Berlin.

Im März 1957 legte ich an der Friedrich-Ebert-Schule in Berlin-Wilmersdorf die Reifeprüfung ab. Anschließend begann ich das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Freien Universität Berlin, das ich im Dezember 1962 mit der Ersten Staatsprüfung abschloß. Seit dieser Zeit bin ich als wissenschaftlicher Assistent bei Herrn Professor Dr. K. Strubecker am Mathematischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe tätig.

Meine akademischen Lehrer in Berlin waren die Professoren Dinghas, Grotemeyer, Kanold, Meschkowski, Ostmann, Ringel und Stöhr in Mathematik, Honerjäger, Lassen, Ludwig und Päsler in Physik sowie Gollwitzer, Hübner, Kanthack und Weischedel in Philosophie; außerdem hörte ich Vorlesungen in Pädagogik bei Professor Müller und musikwissenschaftliche Vorlesungen bei Professor Adrio. Schließlich besuchte ich in Karlsruhe eine Gastvorlesung von Professor Bompiani aus Rom.

Udo Simon